Capítulo 3:

Funciones

Óptimas

Indice:

3.1.- Funciones Óptimas

3.2.- Formulaciones Débiles

3.3.- Formulaciones Débiles Alternativas

3.1.- Funciones Óptimas

Considérese un BVPJ, $(P-B-J)u=f-g-j$, formulado en un dominio Ω con una partición $\Pi=\{\Omega_1,...,\Omega_E\}$ y con los siguientes datos: $f\equiv Pu_\Omega$, $g\equiv Bu_\partial$ como condiciones de frontera en $\partial\Omega$ y $j\equiv Ju_\Sigma$ como condiciones de saltos prescritos en Σ, donde $u_\Omega\in\widehat{D_1}(\Omega)$, $u_\partial\in\widehat{D_1}(\Omega)$ y $u_\Sigma\in\widehat{D_1}(\Omega)$. Se supone que el problema está bien planteado y que tiene solución única $u\in\widehat{D_1}(\Omega)$.

Sin pérdida de generalidad, solamente se considerará el caso cuando las condiciones de frontera son homogéneas, $g\equiv Bu_\partial\equiv 0$. Se hace esto por dos motivos. Primero, porque existen métodos estándares para transformar un BVPJ con condiciones de frontera no homogéneas en otro equivalente pero con condiciones de frontera homogéneas; básicamente consisten en restar a la solución una función que satisfaga las condiciones de frontera no homogéneas. Segundo, porque el supuesto de las ***condiciones de frontera homogéneas*** simplifica el desarrollo de los planteamientos que se presentan.

3.1.1.- Descomposición Dual de Operadores K y J

La información buscada de la solución en la frontera interior Σ induce directamente la descomposición del operador K en la pareja de operadores $\{S_K, R_K\}$, de modo que S_K^*u contiene la información buscada mientras que R_K^*u contiene la información redundante. Así, la información buscada determina las condiciones de continuidad (en general, las condiciones de salto) que deben cumplir las funciones óptimas de peso $w \in \widehat{O_T}$ para que, al aplicar el ***método de los residuos pesados***, éstas capturen dicha información.

Por otro lado, para que las funciones óptimas de base $\mathrm{v} \in \widehat{O_B}$ contengan la información buscada de la solución en Σ, éstas deben satisfacer las ***condiciones de continuidad de Poincaré-Steklov***. Lo anterior induce la descomposición del operador J en la pareja de operadores $\{S_J, R_J\}$, de modo que $S_J \mathrm{v}$ se relaciona con dichas condiciones de continuidad, mientras que $R_J \mathrm{v}$ se relaciona con las condiciones de continuidad redundantes. A su vez, la descomposición del operador J induce una descomposición correspondiente pero ahora de los datos del problema, específicamente de Ju_Σ, que son las condiciones de saltos prescritos en Σ.

A las dos parejas de descomposiciones de operadores $\{S_K, R_K\}$ y $\{S_J, R_J\}$ se les llamará ***descomposición dual***.

<u>**Definición 3.1.1**</u>- Descomposición dual

Sea la ***descomposición dual***, formada por las dos parejas de descomposiciones de operadores:

$$S_K + R_K \equiv K \tag{3.1.1}$$

$$S_J + R_J \equiv J \tag{3.1.2}$$

donde los operadores S_K y S_J se toman de tal forma que $S_K^* u$ contiene la información buscada de la solución en Σ y $S_J \mathrm{v}$ se relaciona con las condiciones de continuidad de Poincaré-Steklov en Σ.

Para formalizar la descomposición dual se introduce las siguientes funcionales bilineales. Sean $S_K^*(u,w)$, $R_K^*(u,w)$, $S_J(u,w)$ y $R_J(u,w)$ funcionales bilineales reales definidas en $\widehat{D_1}(\Omega) \times \widehat{D_2}(\Omega)$ tales que producen las siguientes descomposiciones, las cuales se cumplen de manera puntual en la frontera interior Σ:

$$S_K^*(u,w) + R_K^*(u,w) \equiv K^*(u,w) \quad , \forall \underline{x} \in \Sigma \tag{3.1.3}$$

$$\mathcal{S}_J(u,w)+\mathcal{R}_J(u,w)\equiv \mathcal{J}(u,w) \quad ,\forall \underline{x}\in\Sigma \tag{3.1.4}$$

y sean $\left\langle S_K^* u,w\right\rangle$, $\left\langle R_K^* u,w\right\rangle$, $\left\langle S_J u,w\right\rangle$ y $\left\langle R_J u,w\right\rangle$ funcionales bilineales reales definidas en $\widehat{D_1}(\Omega)\times\widehat{D_2}(\Omega)$ tales que:

$$\left\langle S_K^* u,w\right\rangle\equiv\int_\Sigma \mathcal{S}_K^*(u,w)\,d\underline{x} \quad \text{en } \Sigma \tag{3.1.5}$$

$$\left\langle R_K^* u,w\right\rangle\equiv\int_\Sigma \mathrm{R}_K^*(u,w)\,d\underline{x} \quad \text{en } \Sigma \tag{3.1.6}$$

$$\left\langle S_J u,w\right\rangle\equiv\int_\Sigma \mathcal{S}_J(u,w)\,d\underline{x} \quad \text{en } \Sigma \tag{3.1.7}$$

$$\left\langle R_J u,w\right\rangle\equiv\int_\Sigma \mathrm{R}_J(u,w)\,d\underline{x} \quad \text{en } \Sigma \tag{3.1.8}$$

Además, la descomposición dual induce la siguiente descomposición en los datos del problema:

$$j_S+j_R\equiv j\equiv Ju_\Sigma \tag{3.1.9}$$

$$j_S\equiv S_J u_\Sigma \tag{3.1.10}$$

$$j_R\equiv R_J u_\Sigma \tag{3.1.11}$$

Ahora bien, el operador S_K permite definir las condiciones para que una función de base $\hat{u}\in\widehat{D_1}(\Omega)$ *contenga* la información buscada de la solución en Σ. Nótese que esta función no es necesariamente la solución del BVPJ. Tan solo es la información buscada de la solución en Σ y no en el interior de los dominios Ω_i, ni en la frontera exterior $\partial\Omega$.

Definición 3.1.2.- Información buscada

Sea un BVPJ con solución única $u\in\widehat{D_1}(\Omega)$. Sean las funcionales bilineales S_K y R_K tales que $S_K+R_K=K$. Sea una función de base $\hat{u}\in\widehat{D_1}(\Omega)$ tal que:

$$S_K^*\hat{u}=S_K^* u \quad \text{en } \Sigma \tag{3.1.12}$$

Entonces se dice que $\hat{u}$ ***contiene o posee la información buscada*** de la solución en Σ.

3.1.2.- BVPJ Localizado

Considérese el siguiente problema, denominado ***BVPJ localizado***, el cual se utilizará para definir las condiciones de continuidad (en general, las condiciones de salto) que debe satisfacer las funciones óptimas de base y otras funciones auxiliares importantes. Dice así:

"Dada una función $u_S \in N_B \subset \widehat{D_1}(\Omega)$*, encuéntrese una función* $\widehat{u} \in \widehat{D_1}(\Omega)$ *tal que* $S_K^* \widehat{u} = S_K^* u_S$ *y que:*

$$(P - B - R_J)\widehat{u} = \widehat{f} - \widehat{j_R} \tag{3.1.13}$$

con los siguientes datos: $\widehat{f} \equiv P\widehat{u_\Omega}$ *y* $\widehat{j_R} \equiv R_J \widehat{u_\Sigma}$ *donde* $\widehat{u_\Omega} \in \widehat{D_1}(\Omega)$ *y* $\widehat{u_\Sigma} \in N_B$ *".*

Una suposición básica de la metodología FEM-OF es que el BVPJ localizado define problemas de contorno locales, independientes y bien planteados, en cada uno de los subdominios de la partición.

Finalmente, el ***problema dual del BVPJ localizado*** se utilizará para definir las condiciones de continuidad (en general, las condiciones de salto) que debe satisfacer las funciones óptimas de peso. Dice así:

"Dada una función $w_S \in N_C$*, encuéntrese una función* $\widehat{w} \in \widehat{D_2}(\Omega)$ *tal que* $S_J^* \widehat{w} = S_J^* w_S$ *y que:*

$$(Q - C - R_K)\widehat{w} = 0 \text{ "} \tag{3.1.14}$$

Al igual que el BVPJ localizado, se supone que el problema dual también define problemas de contorno locales, independientes y bien planteados, en cada uno de los subdominios de la partición.

3.1.3.- Funciones Óptimas de Base

Las funciones óptimas de base satisfacen el BVPJ localizado (3.1.13) considerando que $\widehat{f} \equiv 0$ y $\widehat{j_R} \equiv 0$; esto es: "*dada una función* $u_S \in N_B$*, encuéntrese una función* $\widehat{u} \in \widehat{D_1}(\Omega)$ *tal que* $S_K^* \widehat{u} = S_K^* u_S$ *y que* $(P - B - R_J)\widehat{u} = 0$ ". Esta última ecuación significa que las funciones óptimas de base pertenecen a los siguientes espacios nulos: N_P, N_B y N_{R_J}.

En particular, si además se impone la condición $S_K^* \widehat{u} = S_K^* u_S = 0$, entonces la única solución a este problema es $\widehat{u} = 0$, ya que lo anterior equivale a plantear problemas de contorno homogéneos locales con condiciones de frontera homogéneas locales en cada uno de los subdominios de la partición. En consecuencia, $S_K^* : \widehat{D_1} \to \widehat{D_2^*}$ define un *mapeo biyectivo* entre las funciones óptimas de base $\widehat{O_B}$ y su imagen bajo $S_K^*\left(\widehat{O_B}\right)$.

Entonces, una función óptima de base se puede caracterizar de manera única especificando la condición $S_K^* \widehat{u} = S_K^* u_S$. En la práctica, lo anterior significa que una función óptima de base se puede caracterizar de manera única especificando sus *trazas* en la frontera interior Σ.

Definición 3.1.3.- Espacio de funciones óptimas de base

Sea el ***espacio de funciones óptimas de base*** $\widehat{O_B}$, el cual se define como:

$$\widehat{O_B} \equiv N_P \cap N_B \cap N_{R_J} \subset \widehat{D_1}(\Omega) \qquad (3.1.15)$$

donde los espacios nulos de los operadores P, B y R_J se definen como:

$$N_P \equiv \left\{ \mathrm{v} \in \widehat{D_1}(\Omega) \middle| P\mathrm{v} = 0 \text{ en cada } \Omega_i \right\} \qquad (3.1.16)$$

$$N_B \equiv \left\{ \mathrm{v} \in \widehat{D_1}(\Omega) \middle| B\mathrm{v} = 0 \text{ en } \partial\Omega \right\} \qquad (3.1.17)$$

$$N_{R_J} \equiv \left\{ \mathrm{v} \in \widehat{D_1}(\Omega) \middle| R_J\mathrm{v} = 0 \text{ en } \Sigma \right\} \qquad (3.1.18)$$

Lo anterior implica que:

$$\left\langle \left(P - B - R_J \right) \mathrm{v}, w \right\rangle = 0 \quad , \forall \mathrm{v} \in \widehat{O_B} \tag{3.1.19}$$

Puesto que las funciones óptimas de base pertenecen al espacio nulo de P, esto es $\mathrm{v} \in N_P$, se les puede considerar como ***soluciones homogéneas*** construidas de manera independiente en cada uno de los subdominios de la partición y que satisface las condiciones de continuidad de Poincaré-Steklov en las fronteras de los subdominios.

3.1.4.- Funciones Óptimas de Peso

Las funciones óptimas de peso satisfacen el **problema dual del BVPJ localizado** (3.1.14), el cual dice: "dada una función $w_S \in N_C$, encuéntrese una función $\widehat{w} \in \widehat{D_2}(\Omega)$ tal que $S_J^* \widehat{w} = S_J^* w_S$ y que $\left(Q - C - R_K \right) \widehat{w} = 0$ ". Esta última ecuación significa que las funciones óptimas de peso pertenecen a los siguientes espacios nulos: N_Q, N_C y N_{R_K}.

De igual forma que el BVPJ localizado, el problema dual cumple con la siguiente propiedad. $S_J^* : \widehat{D_2} \to \widehat{D_1^*}$ define un *mapeo biyectivo* entre las funciones óptimas de peso $\widehat{O_T}$ y su imagen bajo $S_J^* \left(\widehat{O_T} \right)$. Consecuentemente, una función óptima de peso se puede caracterizar de manera única especificando la condición $S_J^* \widehat{w} = S_J^* w_S$. En la práctica, lo anterior significa que una función óptima de peso se puede caracterizar de manera única especificando sus *trazas* en la frontera interior Σ.

Definición 3.1.4.- Espacio de funciones óptimas de peso

Sea el ***espacio de funciones óptimas de peso*** $\widehat{O_T}$, el cual se define como:

$$\widehat{O_T} \equiv N_Q \cap N_C \cap N_{R_K} \subset \widehat{D_2}(\Omega) \tag{3.1.20}$$

donde los espacios nulos de los operadores Q, C y R_K se definen como:

$$N_Q \equiv \left\{ w \in \widehat{D_2}(\Omega) \middle| Qw = 0 \text{ en cada } \Omega_i \right\} \tag{3.1.21}$$

$$N_C \equiv \left\{ w \in \widehat{D_2}(\Omega) \middle| Cw = 0 \text{ en } \partial\Omega \right\} \tag{3.1.22}$$

$$N_{R_K} \equiv \left\{ w \in \widehat{D_2}(\Omega) \middle| R_K w = 0 \text{ en } \Sigma \right\} \tag{3.1.23}$$

Lo anterior implica que:

$$\left\langle \left(Q^* - C^* - R_K^* \right) u, w \right\rangle = 0 \quad , \forall w \in \widehat{O_T} \tag{3.1.24}$$

3.1.5.- Espacio de Funciones Óptimas

El ***espacio de funciones óptimas*** se define como la suma directa del espacio de funciones óptimas de base y el espacio de funciones óptimas de peso, esto es, $\widehat{O_B} \oplus \widehat{O_T}$.

3.1.6.- Función auxiliar u_P

La función auxiliar u_P es solución del BVPJ localizado (3.1.13) considerando que $\widehat{f} \equiv f$, $\widehat{j_R} \equiv j_R$ y $S_K^* u_S \equiv 0$; esto es: "*encuéntrese una función* $\widehat{u} \in \widehat{D_1}(\Omega)$ *tal que* $S_K^* \widehat{u} = 0$ *y que* $\left(P - B - R_J \right) \widehat{u} = f - j_R$ ". Lo anterior equivale a plantear problemas de contorno no homogéneos locales con condiciones de frontera locales establecidas por $S_K^* \widehat{u} = 0$ y $R_J \widehat{u} = j_R$ (junto con $B\widehat{u} = 0$) en cada uno de los subdominios Ω_i de la partición.

<u>**Definición 3.1.5**</u>.- Función auxiliar u_P

La ***función auxiliar*** $u_P \in \widehat{D_1}(\Omega)$ satisface el siguiente BVPJ localizado:

$$\left(P - B - R_J \right) u_P = f - j_R \tag{3.1.25}$$

$$S_K^* u_P = 0 \tag{3.1.26}$$

La función auxiliar u_P *no* es una función óptima de base, pero juega un papel especial en la metodología FEM-OF. Se le puede considerar como una ***solución particular*** construida de manera independiente en cada uno de los subdominios de la partición y que satisface ciertas condiciones de continuidad en las fronteras de los subdominios.

Entonces, la solución del BVPJ se puede escribir como $u = \mathrm{v} + u_P$, donde $\mathrm{v} \in \widehat{O_B}$; esto es:

$$\left\langle \left(P - B - J \right) \mathrm{v}, w \right\rangle = \left\langle f - g - j, w \right\rangle - \left\langle \left(P - B - J \right) u_P, w \right\rangle \quad , \forall w \in \widehat{D_2}\left(\Omega \right) \qquad (3.1.27)$$

El hecho que la función auxiliar u_P satisfaga la condición $S_K^* u_P = 0$ significa que ésta no contribuye a recabar la información buscada. La única función que recaba la información buscada de la solución en Σ es $\mathrm{v} \in \widehat{O_B}$.

3.1.7.- Relación entre los Operadores S_K y S_J

Si se considera que $\mathrm{v} \in \widehat{O_B}$ y que $w \in \widehat{O_T}$ se puede establecer la siguiente relación:

$$\left\langle \left(P - B - J \right) \mathrm{v}, w \right\rangle = \left\langle \left(P - B - R_J - S_J \right) \mathrm{v}, w \right\rangle = -\left\langle S_J \mathrm{v}, w \right\rangle \quad , \forall \mathrm{v} \in \widehat{O_B} \qquad (3.1.28)$$

$$\left\langle \left(Q - C - K \right)^* \mathrm{v}, w \right\rangle = \left\langle \left(Q - C - R_K - S_K \right)^* \mathrm{v}, w \right\rangle = -\left\langle S_K^* \mathrm{v}, w \right\rangle \quad , \forall w \in \widehat{O_T} \qquad (3.1.29)$$

Puesto que $P - B - J = Q^* - C^* - K^*$ entonces:

$$-\left\langle S_J \mathrm{v}, w \right\rangle = -\left\langle S_K^* \mathrm{v}, w \right\rangle \quad , \forall \left(\mathrm{v}, w \right) \in \widehat{O_B} \times \widehat{O_T} \qquad (3.1.30)$$

<u>Teorema 3.1.1.-</u>

Considérese el espacio de funciones óptimas. Una función óptima de base contiene la información buscada si y solo si satisface las condiciones de continuidad de Poincaré-Steklov.

<u>Demostración:</u>

De (3.1.28) y (3.1.29) se tiene (3.1.30), expresión que demuestra el teorema, ya que se establece una igualdad entre el operador S_J que se asocia con las condiciones de continuidad de Poincaré-Steklov con el operador S_K^* que se asocia con la información buscada, cuando se considera el espacio de funciones óptimas.

□

3.2.- Formulaciones Débiles

Se dispone de tres procedimientos para recabar la información buscada de la solución en la frontera interior Σ: el método directo de Steklov-Poincaré, el cual utiliza funciones óptima de base; el método indirecto de Trefftz-Herrera, el cual utiliza funciones óptimas de peso; y el método de Petrov-Galerkin, el cual utiliza tanto funciones óptimas de base como funciones óptimas de peso. La manera en la cual se presentan las tres formulaciones débiles en esta sección 3.2, se le llamará ***convencional***. Esto es para poderla distinguir de una manera de presentación alternativa que se desarrollará en la siguiente sección 3.3, que será más adecuada para el planteamiento de la metodología FEM-OF.

3.2.1.- Problema General

Definición 3.2.1.- Problema general o BVPJ general

El ***problema general*** es un BVPJ con condiciones de frontera homogéneas tal que:

$$(P-B-J)u = f - j \tag{3.2.1}$$

con los siguientes datos:

$$f \equiv Pu_{\Omega}\,,\ j \equiv Ju_{\Sigma} \tag{3.2.2}$$

donde $u_{\Omega} \in \widehat{D_1}(\Omega)$ y $u_{\Sigma} \in N_B$.

El problema general, también referido como ***BVPJ general***, será el problema empleado por las formulaciones débiles *convencionales*.

Nótese que las condiciones de frontera homogéneas y las condiciones de saltos prescritos son compatibles, ya que $u_\Sigma \in N_B$.

En consecuencia, el BVPJ localizado para calcular la función auxiliar $u_P \in \widehat{D_1}(\Omega)$ que se asocia al problema general es:

$$(P - B - R_J)u_P = f - j_R \tag{3.2.3}$$

$$S_K^* u_P = 0 \tag{3.2.4}$$

3.2.2.- Método Directo de Steklov-Poincaré

En el método directo se construye un espacio de funciones de base especializado, llamado espacio de funciones óptimas de base $\widehat{O_B}$, de modo que sus funciones contienen la información buscada. De hecho, una función óptima de base contiene la información buscada si y solo si satisface las condiciones de continuidad de Poincaré-Steklov. En este método el espacio de funciones de peso se toma igual que el espacio de funciones de base.

Teorema 3.2.1.- Método directo de Steklov-Poincaré

Sea el BVPJ *general* (3.2.1)-(3.2.2).

Sea $\widehat{O_B} \equiv N_P \cap N_B \cap N_{R_J} \subset \widehat{D_1}(\Omega) \cap \widehat{D_2}(\Omega)$ un conjunto de funciones óptimas de base TH-Completo para $S_J : \widehat{D_1}(\Omega) \to \widehat{D_2^*}(\Omega)$.

Supóngase que el BVPJ tiene solución única $u \in N_B \subset \widehat{D_1}(\Omega)$ tal que $u = \hat{v} + u_P$, donde $\hat{v} \in \widehat{O_B}$ y $u_P \in \widehat{D_1}(\Omega)$ es solución del BVPJ localizado (3.2.3)-(3.2.4).

Entonces $\hat{v} \in \widehat{O_B}$ contiene la información buscada de la solución en la frontera interior Σ, esto es que $S_K^* \hat{v} = S_K^* u$, si y solo si:

$$-\left\langle S_J \hat{v}, w \right\rangle = \left\langle S_J u_P, w \right\rangle - \left\langle j_S, w \right\rangle \quad ,\forall w \in \widehat{O_B} \tag{3.2.5}$$

Demostración:

Condición suficiente:

Supóngase que $\hat{\mathrm{v}} \in \widehat{O_B}$ *contiene la información buscada, esto es:* $S_K^* \hat{\mathrm{v}} = S_K^* u$ *.*

Puesto que $u \in N_B \subset \widehat{D_1}(\Omega)$ donde $u = \hat{\mathrm{v}} + u_P$ *, se tiene que:*

$$\left\langle (P-B-J)\left(\hat{\mathrm{v}}+u_P\right), w\right\rangle = \langle f-j, w\rangle \quad ,\forall w \in \widehat{O_B} \subset \widehat{D_2}(\Omega)$$

Considerando la descomposición del operador $J = S_J + R_J$ *, se tiene que:*

$$\left\langle (P-B-S_J-R_J)\left(\hat{\mathrm{v}}+u_P\right), w\right\rangle = \langle f-j_S-j_R, w\rangle \quad ,\forall w \in \widehat{O_B}$$

Puesto que los operadores son lineales, reagrupando términos se tiene que:

$$-\left\langle S_J \hat{\mathrm{v}}, w\right\rangle + \left\langle (P-B-R_J)\hat{\mathrm{v}}, w\right\rangle =$$

$$\langle S_J u_P - j_S, w\rangle - \langle (P-B-R_J)u_P, w\rangle + \langle f-j_R, w\rangle \quad ,\forall w \in \widehat{O_B}$$

Por construcción se cumple que $(P-B-R_J)u_P = f-j_R$ *, esto es:*

$$-\left\langle S_J \hat{\mathrm{v}}, w\right\rangle + \left\langle (P-B-R_J)\hat{\mathrm{v}}, w\right\rangle = \langle S_J u_P - j_S, w\rangle \quad ,\forall w \in \widehat{O_B}$$

Por construcción se cumple que $(P-B-R_J)\hat{\mathrm{v}} = 0$ *, ya que* $\hat{\mathrm{v}} \in \widehat{O_B}$ *, esto es:*

$$-\left\langle S_J \hat{\mathrm{v}}, w\right\rangle = \langle S_J u_P - j_S, w\rangle \quad ,\forall w \in \widehat{O_B}$$

Finalmente, se tiene que:

$$-\left\langle S_J \hat{\mathrm{v}}, w\right\rangle = \langle S_J u_P, w\rangle - \langle j_S, w\rangle \quad ,\forall w \in \widehat{O_B}$$

<u>Condición necesaria:</u>

Sea $\widehat{\mathrm{v}} \in \widehat{O_B}$ *y supóngase que:*

$$-\left\langle S_J \widehat{\mathrm{v}}, w\right\rangle = \langle S_J u_P, w\rangle - \langle j_S, w\rangle \quad ,\forall w \in \widehat{O_B}$$

Completando términos, se tiene que:

$$\left\langle (P-B-J)\left(\widehat{\mathrm{v}}+u_P\right), w\right\rangle = \langle f-j, w\rangle \quad ,\forall w \in \widehat{O_B}$$

La solución $u \in N_B \subset \widehat{D_1}(\Omega)$ *cumple que:*

$$\left\langle (P-B-J)u, w\right\rangle = \langle f-j, w\rangle \quad ,\forall w \in \widehat{O_B} \subset \widehat{D_2}(\Omega)$$

Restando las dos últimas expresiones, se tiene que:

$$\left\langle (P-B-J)\left(\widehat{\mathrm{v}}+u_P-u\right), w\right\rangle = 0 \quad ,\forall w \in \widehat{O_B}$$

Puesto que se trata de un BVPJ homogéneo con condiciones tanto de frontera como de saltos prescritos homogéneas y con solución única, ésta debe ser cero. En consecuencia:

$\widehat{v}+u_P-u=0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{v}+u_P=u$

Aplicando el operador S_K^**, se tiene que:*

$S_K^*\left(\widehat{v}+u_P\right)=S_K^*u$

Puesto que $S_K^*u_P=0$*, se tiene que:*

$S_K^*\widehat{v}=S_K^*u$

Finalmente $\widehat{v}\in\widehat{O_B}$ *contiene la información buscada y se le denota como* $\hat{v}\equiv\widehat{v}$*.*

□

Cuando se satisface la ecuación (3.2.5) se tiene que $u=\hat{v}+u_P$ es la solución en el interior de cada subdominio Ω_i (en el método directo de Steklov-Poincaré no se requiere del procedimiento de interpolación óptima).

3.2.3.- Método Indirecto de Trefftz-Herrera

En el método indirecto se construye un espacio de funciones de peso especializado, llamado espacio de funciones óptimas de peso $\widehat{O_T}$, de modo que al aplicar el método de los residuos pesados, sus funciones capturan la información buscada. En este método el espacio de funciones de base se toma igual que el espacio de funciones de peso.

Teorema 3.2.2.- Método indirecto de Trefftz-Herrera

Sea el BVPJ *general* (3.2.1)-(3.2.2).

Sea $\widehat{O_T}\equiv N_Q\cap N_C\cap N_{R_K}\subset\widehat{D_2}(\Omega)$ un conjunto de funciones óptimas de peso TH-Completo para $S_K^*:\widehat{D_1}(\Omega)\rightarrow\widehat{D_2^*}(\Omega)$.

Supóngase que el BVPJ tiene solución única $u\in N_B\subset\widehat{D_1}(\Omega)$.

Entonces $\hat{u} \in N_B \subset \widehat{D_1}(\Omega)$ contiene la información buscada de la solución en la frontera interior Σ, esto es que $S_K^* \hat{u} = S_K^* u$, si y solo si:

$$-\left\langle S_K^* \hat{u}, w \right\rangle = \left\langle f - j, w \right\rangle \quad , \forall w \in \widehat{O_T} \tag{3.2.6}$$

<u>Demostración</u>:

<u>Condición suficiente:</u>

Supóngase que $\hat{u} \in N_B \subset \widehat{D_1}(\Omega)$ *contiene la información buscada, esto es:* $S_K^* \hat{u} = S_K^* u$ *.*

Puesto que $\hat{u} \in N_B \subset \widehat{D_1}(\Omega)$*, se tiene que:*

$$\left\langle (P - B - J)\hat{u}, w \right\rangle = \left\langle f - j, w \right\rangle \quad , \forall w \in \widehat{D_2}(\Omega)$$

Considerando que $Q^* - C^* - K^* = P - B - J$ *, se tiene que:*

$$\left\langle (Q^* - C^* - K^*)\hat{u}, w \right\rangle = \left\langle f - j, w \right\rangle \quad , \forall w \in \widehat{D_2}(\Omega)$$

Considerando la descomposición del operador $K^* = R_K^* + S_K^*$*, se tiene que:*

$$\left\langle (Q^* - C^* - R_K^* - S_K^*)\hat{u}, w \right\rangle = \left\langle f - j, w \right\rangle \quad , \forall w \in \widehat{D_2}(\Omega)$$

Finalmente, por construcción se cumple que $\left\langle (Q^* - C^* - R_K^*)\hat{u}, w \right\rangle = 0$*,* $\forall w \in \widehat{O_T} \subset \widehat{D_2}(\Omega)$*, esto es:*

$$-\left\langle S_K^* \hat{u}, w \right\rangle = \left\langle f - j, w \right\rangle \quad , \forall w \in \widehat{O_T}$$

<u>Condición necesaria:</u>

Sea $\hat{u} \in N_B \subset \widehat{D_1}(\Omega)$ *y supóngase que:*

$$-\left\langle S_K^* \hat{u}, w \right\rangle = \left\langle f - j, w \right\rangle \quad , \forall w \in \widehat{O_T}$$

La solución $u \in N_B \subset \widehat{D_1}(\Omega)$ *cumple que:*

$$-\left\langle S_K^* u, w \right\rangle = \left\langle f - j, w \right\rangle \quad , \forall w \in \widehat{O_T} \subset \widehat{D_2}(\Omega)$$

Restando las dos últimas expresiones, se tiene que:

$$-\left\langle S_K^* (\hat{u} - u), w \right\rangle = 0 \quad , \forall w \in \widehat{O_T}$$

Puesto que $\widehat{O_T}$ *es TH-Completo para* S_K^* *se tiene que:*

$$S_K^*\left(\widehat{u}-u\right)=0 \quad \Rightarrow \quad S_K^*\widehat{u}=S_K^*u$$

Finalmente, $\widehat{u}\in N_B\subset\widehat{D_1}\left(\Omega\right)$ *contiene la información buscada y se le denota como* $\hat{u}\equiv\widehat{u}$.

□

Cuando se satisface la ecuación (3.2.6) se tiene que $\hat{u}$ es la información buscada de la solución pero solamente en Σ. Para calcular la solución en el interior de cada subdominio Ω_i se requiere del procedimiento de *interpolación óptima*.

3.2.4.- Método de Petrov-Galerkin

El método de Petrov-Galerkin utiliza espacios de funciones de base y de funciones de peso diferentes. En particular, se utiliza el espacio de funciones óptimas de base $\widehat{O_B}$ desarrollado en el método directo y el espacio de funciones óptimas de peso $\widehat{O_T}$ desarrollado en el método indirecto.

Se tienen dos formulaciones. La primera es como un método directo y la segunda como un método indirecto. A continuación se presenta la primera, la cual se prefiere ya que proporciona la solución en todo el dominio.

Teorema 3.2.3.- Método (directo) de Petrov-Galerkin

Sea el BVPJ *general* (3.2.1)-(3.2.2).

Sea $\widehat{O_B}\equiv N_P\cap N_B\cap N_{R_J}\subset\widehat{D_1}\left(\Omega\right)$ un conjunto de funciones óptimas de base TH-Completo para $S_J:\widehat{D_1}\left(\Omega\right)\to\widehat{D_2^*}\left(\Omega\right)$.

Sea $\widehat{O_T}\equiv N_Q\cap N_C\cap N_{R_K}\subset\widehat{D_2}\left(\Omega\right)$ un conjunto de funciones óptimas de peso TH-Completo para $S_K^*:\widehat{D_1}\left(\Omega\right)\to\widehat{D_2^*}\left(\Omega\right)$.

Supóngase que el BVPJ tiene solución única $u \in N_B \subset \widehat{D_1}(\Omega)$ tal que $u = \hat{v} + u_P$, donde $\hat{v} \in \widehat{O_B}$ y $u_P \in \widehat{D_1}(\Omega)$ es solución del BVPJ localizado (3.2.3)-(3.2.4).

Entonces $\hat{v} \in \widehat{O_B}$ contiene la información buscada de la solución en la frontera interior Σ, esto es que $S_K^* \hat{v} = S_K^* u$, si y solo si:

$$-\left\langle S_J \hat{v}, w \right\rangle = \left\langle S_J u_P, w \right\rangle - \left\langle j_S, w \right\rangle \quad , \forall w \in \widehat{O_T} \tag{3.2.7}$$

<u>Demostración:</u>

<u>Condición suficiente:</u>

Supóngase que $\hat{v} \in \widehat{O_B}$ *contiene la información buscada, esto es:* $S_K^* \hat{v} = S_K^* u$ *.*

Puesto que $u \in N_B \subset \widehat{D_1}(\Omega)$ donde $u = \hat{v} + u_P$*, se tiene que:*

$$\left\langle (P - B - J)\left(\hat{v} + u_P\right), w \right\rangle = \left\langle f - j, w \right\rangle \quad , \forall w \in \widehat{O_T} \subset \widehat{D_2}(\Omega)$$

Considerando la descomposición del operador $J = S_J + R_J$*, se tiene que:*

$$\left\langle (P - B - S_J - R_J)\left(\hat{v} + u_P\right), w \right\rangle = \left\langle f - j_S - j_R, w \right\rangle \quad , \forall w \in \widehat{O_T}$$

Puesto que los operadores son lineales, reagrupando términos se tiene que:

$$-\left\langle S_J \hat{v}, w \right\rangle + \left\langle (P - B - R_J)\hat{v}, w \right\rangle =$$

$$\left\langle S_J u_P - j_S, w \right\rangle - \left\langle (P - B - R_J) u_P, w \right\rangle + \left\langle f - j_R, w \right\rangle \quad , \forall w \in \widehat{O_T}$$

Por construcción se cumple que $(P - B - R_J) u_P = f - j_R$*, esto es:*

$$-\left\langle S_J \hat{v}, w \right\rangle + \left\langle (P - B - R_J)\hat{v}, w \right\rangle = \left\langle S_J u_P - j_S, w \right\rangle \quad , \forall w \in \widehat{O_T}$$

Por construcción se cumple que $(P - B - R_J)\hat{v} = 0$*,* $\hat{v} \in \widehat{O_B}$*, esto es:*

$$-\left\langle S_J \hat{v}, w \right\rangle = \left\langle S_J u_P - j_S, w \right\rangle \quad , \forall w \in \widehat{O_T}$$

Finalmente, se tiene que:

$$-\left\langle S_J \hat{v}, w \right\rangle = \left\langle S_J u_P, w \right\rangle - \left\langle j_S, w \right\rangle \quad , \forall w \in \widehat{O_T}$$

<u>Condición necesaria:</u>

Sea $\hat{v} \in \widehat{O_B}$ *y supóngase que:*

$$-\left\langle S_J \widehat{\mathrm{v}}, w\right\rangle = \left\langle S_J u_P, w\right\rangle - \left\langle j_S, w\right\rangle \quad ,\forall w \in \widehat{O_T}$$

Completando términos, se tiene que:

$$\left\langle (P-B-J)\left(\widehat{\mathrm{v}}+u_P\right), w\right\rangle = \left\langle f-j, w\right\rangle \quad ,\forall w \in \widehat{O_T}$$

La solución $u \in N_B \subset \widehat{D_1}(\Omega)$ *cumple que:*

$$\left\langle (P-B-J)u, w\right\rangle = \left\langle f-j, w\right\rangle \quad ,\forall w \in \widehat{O_T} \subset \widehat{D_2}(\Omega)$$

Restando las dos últimas expresiones, se tiene que:

$$\left\langle (P-B-J)\left(\widehat{\mathrm{v}}+u_P-u\right), w\right\rangle = 0 \quad ,\forall w \in \widehat{O_T}$$

Puesto que se trata de un BVPJ homogéneo con condiciones tanto de frontera como de saltos prescritos homogéneas y con solución única, ésta debe ser cero. En consecuencia:

$$\widehat{\mathrm{v}}+u_P-u=0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{\mathrm{v}}+u_P=u$$

Aplicando el operador S_K^**, se tiene que:*

$$S_K^*\left(\widehat{\mathrm{v}}+u_P\right)=S_K^* u$$

Puesto que $S_K^* u_P = 0$*, se tiene que:*

$$S_K^* \widehat{\mathrm{v}} = S_K^* u$$

Finalmente $\widehat{\mathrm{v}} \in \widehat{O_B}$ *contiene la información buscada y se le denota como* $\hat{\mathrm{v}} \equiv \widehat{\mathrm{v}}$*.*

□

Cuando se satisface la ecuación (3.2.7) se tiene que $u = \hat{\mathrm{v}} + u_P$ es la solución en el interior de cada subdominio Ω_i (en la versión directa del método de Petrov-Galerkin no se requiere del procedimiento de interpolación óptima).

Ahora bien, la segunda formulación es como método indirecto.

Teorema 3.2.4.- Método (indirecto) de Petrov-Galerkin

Sea el BVPJ *general* (3.2.1)-(3.2.2).

Sea $\widehat{O_B} \equiv N_P \cap N_B \cap N_{R_J} \subset \widehat{D_1}(\Omega)$ un conjunto de funciones óptimas de base TH-Completo para $S_J : \widehat{D_1}(\Omega) \to \widehat{D_2^*}(\Omega)$.

Sea $\widehat{O_T} \equiv N_Q \cap N_C \cap N_{R_K} \subset \widehat{D_2}(\Omega)$ un conjunto de funciones óptimas de peso TH-Completo para $S_K^* : \widehat{D_1}(\Omega) \to \widehat{D_2^*}(\Omega)$.

Supóngase que el BVPJ tiene solución única $u \in N_B \subset \widehat{D_1}(\Omega)$.

Entonces $\hat{u} \in \widehat{O_B}$ contiene la información buscada de la solución en la frontera interior Σ, esto es que $S_K^* \hat{u} = S_K^* u$, si y solo si:

$$-\left\langle S_K^* \hat{u}, w \right\rangle = \left\langle f - j, w \right\rangle \quad , \forall w \in \widehat{O_T} \tag{3.2.8}$$

Demostración:

Condición suficiente:

Supóngase que $\hat{u} \in \widehat{O_B}$ *contiene la información buscada, esto es:* $S_K^* \hat{u} = S_K^* u$.

Puesto que $\hat{u} \in \widehat{O_B} \subset \widehat{D_1}(\Omega)$, *se tiene que:*

$$\left\langle (P - B - J)\hat{u}, w \right\rangle = \left\langle f - j, w \right\rangle \quad , \forall w \in \widehat{D_2}(\Omega)$$

Considerando que $Q^* - C^* - K^* = P - B - J$, *se tiene que:*

$$\left\langle (Q^* - C^* - K^*)\hat{u}, w \right\rangle = \left\langle f - j, w \right\rangle \quad , \forall w \in \widehat{D_2}(\Omega)$$

Considerando la descomposición del operador $K^* = R_K^* + S_K^*$, *se tiene que:*

$$\left\langle (Q^* - C^* - R_K^* - S_K^*)\hat{u}, w \right\rangle = \left\langle f - j, w \right\rangle \quad , \forall w \in \widehat{D_2}(\Omega)$$

Finalmente, por construcción se cumple que $\left\langle (Q^* - C^* - R_K^*)\hat{u}, w \right\rangle = 0$, $\forall w \in \widehat{O_T} \subset \widehat{D_2}(\Omega)$, *esto es:*

$$-\left\langle S_K^* \hat{u}, w \right\rangle = \left\langle f - j, w \right\rangle \quad , \forall w \in \widehat{O_T}$$

Condición necesaria:

Sea $\widehat{u} \in \widehat{O_B}(\Omega)$ *y supóngase que:*

$$-\left\langle S_K^* \widehat{u}, w \right\rangle = \left\langle f - j, w \right\rangle \quad , \forall w \in \widehat{O_T}$$

La solución $u \in N_B \subset \widehat{D_1}(\Omega)$ *cumple que:*

$$-\left\langle S_K^* u, w \right\rangle = \left\langle f - j, w \right\rangle \quad , \forall w \in \widehat{O_T} \subset \widehat{D_2}(\Omega)$$

Restando las dos últimas expresiones, se tiene que:

$$-\left\langle S_K^* \left(\overset{\frown}{u} - u \right), w \right\rangle = 0 \quad , \forall w \in \widehat{O_T}$$

Puesto que $\widehat{O_T}$ *es TH-Completo para* S_K^* *se tiene que:*

$$S_K^* \left(\overset{\frown}{u} - u \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad S_K^* \overset{\frown}{u} = S_K^* u$$

Finalmente, $\overset{\frown}{u} \in \widehat{O_B}(\Omega)$ *contiene la información buscada y se le denota como* $\hat{u} \equiv \overset{\frown}{u}$ *.*

□

Cuando se satisface la ecuación (3.2.8) se tiene que $\hat{u}$ es la información buscada de la solución pero solamente en Σ. Para calcular la solución en el interior de cada subdominio Ω_i se requiere del procedimiento de *interpolación óptima*.

3.3- Formulaciones Débiles Alternativas

Como ya se mencionó, se dispone de tres procedimientos para recabar la información buscada de la solución en la frontera interior Σ: el método directo de Steklov-Poincaré, el método indirecto de Trefftz-Herrera y el método de Petrov-Galerkin. La manera en la cual se presentan las tres formulaciones débiles en esta sección 3.3, se le llamará ***alternativa***. Es importante hacer notar que las formulaciones débiles *alternativas* son más adecuadas para el planteamiento de la metodología FEM-OF que las formulaciones débiles *convencionales* presentadas en la sección anterior 3.2.

El propósito de presentar las ***formulaciones débiles alternativas*** es para establecer una ***familia unificada de métodos*** que se distinguen entre sí por el uso diferente de espacios especializados de funciones de base y de funciones de peso. La estructura unificada de estos métodos se debe a las fórmulas de Green-Herrera $P-B-J \equiv Q^*-C^*-K^*$; a la descomposición dual de los operadores $J \equiv S_J + R_J$ y $K \equiv S_K + R_K$; y a la forma de construir los espacios de funciones óptimas de base $\widehat{O_B}$ y de funciones óptimas de peso $\widehat{O_T}$.

Además, las formulaciones débiles alternativas tienen un aspecto similar a aquellas que aparecen en la literatura de métodos de elementos finitos convencionales.

3.3.1.- Problema Básico

Se transformará el ***BVPJ general*** (3.2.1)-(3.2.2): $(P-B-J)u = f - j$, sujeto a condiciones de frontera homogéneas en $\partial\Omega$ y a condiciones de saltos prescritos no homogéneos $j \equiv J\widehat{u_\Sigma}$ en Σ (donde $\widehat{u_\Sigma} \in N_B$), a otro BVPJ equivalente pero ahora con condiciones de saltos prescritos homogéneos en Σ.

Para tal efecto, primero se construye convenientemente *-ad-hoc-* una función $u_\Sigma \in N_B$ de modo que satisfaga la condición $S_K^* u_\Sigma = 0$, junto con las condiciones de frontera homogéneas en $\partial\Omega$ y las condiciones de saltos prescritos $Ju_\Sigma = J\widehat{u_\Sigma}$ en Σ. Al respecto se precisa lo siguiente. Esta función existe porque las condiciones son compatibles; la función $u_\Sigma \in N_B$ no es una solución del BVPJ; y por último, la condición $S_K^* u_\Sigma = 0$ significa que la función $u_\Sigma \in N_B$ no contiene en absoluto la información buscada.

Entonces, la solución del BVPJ general $u \in \widehat{D_1}(\Omega)$ se puede escribir como $u = u_C + u_\Sigma$, donde $u_C \in \widehat{D_1}(\Omega)$ es una ***función totalmente continua,*** tanto en su valor como en sus derivadas normales a través de Σ. Por otro lado, puesto que la función $u_\Sigma \in N_B$ satisface las condiciones de saltos prescritos $Ju_\Sigma = J\widehat{u_\Sigma}$ en Σ, en general es una ***función totalmente discontinua,*** tanto en su valor como en sus derivadas normales a través de Σ.

En consecuencia, el BVPJ general se puede transformar en un BVPJ equivalente pero con *solución totalmente continua* a través Σ, tanto en su valor como en sus derivadas normales, además de tener condiciones de frontera homogéneas en $\partial\Omega$ y con condiciones de saltos prescritos homogéneos en Σ. A este nuevo problema se le llamará ***problema básico,*** o bien ***BVPJ básico,*** y será el problema empleado por las formulaciones débiles alternativas. Se describe a continuación.

Definición 3.3.1.- Problema básico o BVPJ básico

El ***problema básico*** es un BVPJ con condiciones de frontera homogéneas tal que:

$$(P - B - J)u_C = f - Pu_\Sigma \tag{3.3.1}$$

con los siguientes datos y condiciones:

$$f \equiv Pu_\Omega\,, \quad S_K^* u_\Sigma = 0\,, \quad Ju_\Sigma = J\widehat{u_\Sigma} \tag{3.3.2}$$

donde $u_{\Omega} \in D_1(\Omega)$, $u_{\Sigma} \in N_B$ y, además, $j \equiv J\widehat{u_{\Sigma}}$ son las condiciones de saltos prescritos en Σ del problema general asociado, siendo la solución de éste último $u = u_C + u_{\Sigma}$.

Procedimiento:

Sea el BVPJ general:

$(P - B - J)u = f - j$

Puesto que $u = u_C + u_{\Sigma}$*, se tiene que:*

$(P - B - J)(u_C + u_{\Sigma}) = f - j$

$(P - B - J)u_C = f - j - (P - B - J)u_{\Sigma}$

Puesto que $Bu_{\Sigma} = 0$ *y* $Ju_{\Sigma} = j$*, se tiene que:*

$(P - B - J)u_C = f - Pu_{\Sigma}$

Junto con las condiciones de frontera homogéneas en $\partial\Omega$ *:*

$Bu_C = B(u - u_{\Sigma}) = Bu - Bu_{\Sigma} = 0 - 0 = 0$

Y las condiciones de salto prescritos homogéneos en Σ *:*

$Ju_C = J(u - u_{\Sigma}) = Ju - Ju_{\Sigma} = j - j = 0$

□

En consecuencia, el BVPJ localizado para calcular la función auxiliar $u_P \in \widehat{D_1}(\Omega)$ que se asocia al problema básico es:

$$(P - B - R_J)u_P = f - Pu_{\Sigma} \qquad (3.3.3)$$

$$S_K^* u_P = 0 \qquad (3.3.4)$$

3.3.2.- Método Directo de Steklov-Poincaré

Teorema 3.3.1.- Método directo de Steklov-Poincaré

Sea el BVPJ *básico* (3.3.1)-(3.3.2).

Sea $\widehat{O_B} \equiv N_P \cap N_B \cap N_{R_J} \subset \widehat{D_1}(\Omega) \cap \widehat{D_2}(\Omega)$ un conjunto de funciones óptimas de base TH-Completo para $S_J : \widehat{D_1}(\Omega) \to \widehat{D_2^*}(\Omega)$.

Supóngase que el BVPJ tiene solución única $u_C \in N_B \subset \widehat{D_1}(\Omega)$ tal que $u_C = \hat{\mathrm{v}} + u_P$, donde $\hat{\mathrm{v}} \in \widehat{O_B}$ y $u_P \in \widehat{D_1}(\Omega)$ es solución del BVPJ localizado (3.3.3)-(3.3.4).

Entonces $\hat{\mathrm{v}} \in \widehat{O_B}$ contiene la información buscada de la solución en la frontera interior Σ, esto es que $S_K^* \hat{\mathrm{v}} = S_K^* u_C$, si y solo si:

$$\left\langle (P-B-J)\hat{\mathrm{v}}, w \right\rangle = \langle f - Pu_\Sigma, w \rangle - \left\langle (P-B-J)u_P, w \right\rangle \quad ,\forall w \in \widehat{O_B} \tag{3.3.5}$$

Demostración:

Se demostrará que la formulación alternativa (3.3.5) es equivalente a la formulación convencional (3.2.5). Entonces, este teorema quedará demostrado en virtud del teorema 3.2.1.

Partiendo de la formulación débil alternativa:

$$\left\langle (P-B-J)\hat{\mathrm{v}}, w \right\rangle = \langle f - Pu_\Sigma, w \rangle - \left\langle (P-B-J)u_P, w \right\rangle \quad ,\forall w \in \widehat{O_B}$$

Puesto que $J = S_J + R_J$, *se tiene que:*

$$\left\langle (P-B-R_J)\hat{\mathrm{v}}, w \right\rangle - \left\langle S_J \hat{\mathrm{v}}, w \right\rangle = \langle f - Pu_\Sigma, w \rangle - \left\langle (P-B-R_J)u_P, w \right\rangle + \langle S_J u_P, w \rangle$$

Finalmente, puesto que $\left\langle (P-B-R_J)u_P, w \right\rangle = \langle f - Pu_\Sigma, w \rangle$, *y* $\left\langle (P-B-R_J)\hat{\mathrm{v}}, w \right\rangle = 0$ *porque* $\hat{\mathrm{v}} \in \widehat{O_B}$, *se tiene que:*

$$-\left\langle S_J \hat{\mathrm{v}}, w \right\rangle = \langle S_J u_P, w \rangle \quad ,\forall w \in \widehat{O_B}$$

lo cual es la caracterización convencional del método de Steklov-Poincaré cuando $j = 0$, *ya que* $u_C = \hat{\mathrm{v}} + u_P$ *es una función totalmente continua tanto en el valor de su función como en el valor de sus derivadas normales a través de* Σ.

□

Cuando se satisface la ecuación (3.3.5) se tiene que $u = u_C + u_\Sigma = \hat{v} + u_P + u_\Sigma$ es la solución del *BVPJ general* en el interior de cada subdominio Ω_i (en el método directo de Steklov-Poincaré no se requiere del procedimiento de interpolación óptima).

3.3.3.- Método Indirecto de Trefftz-Herrera

Teorema 3.3.2.- Método indirecto de Trefftz-Herrera

Sea el BVPJ *básico* (3.3.1)-(3.3.2).

Sea $\widehat{O_T} \equiv N_Q \cap N_C \cap N_{R_K} \subset \widehat{D_1}(\Omega) \cap \widehat{D_2}(\Omega)$ un conjunto de funciones óptimas de peso TH-Completo para $S_K^* : \widehat{D_1}(\Omega) \to \widehat{D_2^*}(\Omega)$.

Supóngase que el BVPJ tiene solución única $u_C \in N_B \subset \widehat{D_1}(\Omega)$ tal que $u_C = \hat{v} + u_P$, donde $\hat{v} \in \widehat{O_T}$ y $u_P \in \widehat{D_1}(\Omega)$ es solución del BVPJ localizado (3.3.3)-(3.3.4).

Entonces $\hat{v} \in \widehat{O_T}$ contiene la información buscada de la solución en la frontera interior Σ, esto es que $S_K^* \hat{v} = S_K^* u_C$, si y solo si:

$$\left\langle (P-B-J)\hat{v}, w \right\rangle = \left\langle f - Pu_\Sigma, w \right\rangle - \left\langle (P-B-J)u_P, w \right\rangle \quad , \forall w \in \widehat{O_T} \tag{3.3.6}$$

Demostración:

Se demostrará que la formulación alternativa (3.3.6) es equivalente a la formulación convencional (3.2.6). Entonces, este teorema quedará demostrado en virtud del teorema 3.2.2.

Partiendo de la formulación débil alternativa:

$$\left\langle (P-B-J)\hat{v}, w \right\rangle = \left\langle f - Pu_\Sigma, w \right\rangle - \left\langle (P-B-J)u_P, w \right\rangle \quad , \forall w \in \widehat{O_T}$$

Puesto que $P - B - J = (Q - C - K)^*$, *se tiene que:*

$$\left\langle (Q-C-K)^* \hat{v}, w \right\rangle = \left\langle f - Pu_\Sigma, w \right\rangle - \left\langle (Q-C-K)^* u_P, w \right\rangle \quad , \forall w \in \widehat{O_T}$$

Reagrupando términos, se tiene que:

$$\left\langle (Q-C-K)^* \left(\hat{v} + u_P\right), w \right\rangle = \left\langle f - Pu_\Sigma, w \right\rangle \quad , \forall w \in \widehat{O_T}$$

Puesto que $u_C = \hat{\mathrm{v}} + u_P$*, se tiene que:*

$$\left\langle \left(Q - C - K\right)^* u_C, w \right\rangle = \left\langle f - Pu_\Sigma, w \right\rangle \quad , \forall w \in \widehat{O_T}$$

Puesto que $K = S_K + R_K$ *, se tiene que:*

$$\left\langle \left(Q - C - R_K\right)^* u_C, w \right\rangle - \left\langle S_K^* u_C, w \right\rangle = \left\langle f - Pu_\Sigma, w \right\rangle \quad , \forall w \in \widehat{O_T}$$

Finalmente, puesto que $\left\langle \left(Q - C - R_K\right)^* u_C, w \right\rangle = 0$ *,* $\forall w \in \widehat{O_T}$ *, se tiene que:*

$$\left\langle -S_K^* u_C, w \right\rangle = \left\langle f - Pu_\Sigma, w \right\rangle \qquad \forall w \in \widehat{O_T}$$

lo cual es la caracterización convencional del método de Trefftz-Herrera cuando $j = 0$*, ya que* $u_C = \hat{\mathrm{v}} + u_P$ *es una función totalmente continua tanto en el valor de su función como en el valor de sus derivadas normales a través de* Σ*.*

□

Cuando se satisface la ecuación (3.3.6) se tiene que $\hat{\mathrm{v}}$ es la información buscada de la solución del *BVPJ general* pero solamente en Σ. Para calcular la solución en el interior de cada subdominio Ω_i se requiere del procedimiento de *interpolación óptima.*

3.3.4.- Método de Petrov-Galerkin

Teorema 3.3.3.- Método de Petrov-Galerkin

Sea el *BVPJ básico* (3.3.1)-(3.3.2).

Sea $\widehat{O_B} \equiv N_P \cap N_B \cap N_{R_J} \subset \widehat{D_1}(\Omega)$ un conjunto de funciones óptimas de base TH-Completo para $S_J : \widehat{D_1}(\Omega) \to \widehat{D_2^*}(\Omega)$.

Sea $\widehat{O_T} \equiv N_Q \cap N_C \cap N_{R_K} \subset \widehat{D_2}(\Omega)$ un conjunto de funciones óptimas de peso TH-Completo para $S_K^* : \widehat{D_1}(\Omega) \to \widehat{D_2^*}(\Omega)$.

Supóngase que el BVPJ tiene solución única $u_C \in N_B \subset \widehat{D_1}(\Omega)$ tal que $u_C = \hat{\mathrm{v}} + u_P$, donde $\hat{\mathrm{v}} \in \widehat{O_B}$ y $u_P \in \widehat{D_1}(\Omega)$ es solución del BVPJ localizado (3.3.3)-(3.3.4).

Entonces $\hat{\mathrm{v}} \in \widehat{O_B}$ contiene la información buscada de la solución en la frontera interior Σ, esto es que $S_K^* \hat{\mathrm{v}} = S_K^* u_C$, si y solo si:

$$\left\langle (P-B-J)\hat{\mathrm{v}}, w \right\rangle = \langle f - Pu_\Sigma, w\rangle - \langle (P-B-J)u_P, w\rangle \quad , \forall w \in \widehat{O_T} \qquad (3.3.7)$$

Demostración:

Se demostrará que la formulación alternativa (3.3.7) es equivalente a la formulación convencional (3.2.7). Entonces, este teorema quedará demostrado en virtud del teorema 3.2.3.

Partiendo de la formulación débil alternativa:

$$\left\langle (P-B-J)\hat{\mathrm{v}}, w \right\rangle = \langle f - Pu_\Sigma, w\rangle - \langle (P-B-J)u_P, w\rangle \quad , \forall w \in \widehat{O_T}$$

Puesto que $J = S_J + R_J$, *se tiene que:*

$$\left\langle (P-B-R_J)\hat{\mathrm{v}}, w \right\rangle - \left\langle S_J \hat{\mathrm{v}}, w \right\rangle = \langle f - Pu_\Sigma, w\rangle - \langle (P-B-R_J)u_P, w\rangle + \langle S_J u_P, w\rangle$$

Finalmente, puesto que $\langle (P-B-R_J)u_P, w\rangle = \langle f - Pu_\Sigma, w\rangle$, *y* $\left\langle (P-B-R_J)\hat{\mathrm{v}}, w \right\rangle = 0$ *porque* $\hat{\mathrm{v}} \in \widehat{O_B}$, *se tiene que:*

$$-\left\langle S_J \hat{\mathrm{v}}, w \right\rangle = \langle S_J u_P, w\rangle \quad , \forall w \in \widehat{O_T}$$

lo cual es la caracterización convencional del método (directo) de Petrov-Galerkin cuando $j = 0$, *ya que* $u_C = \hat{\mathrm{v}} + u_P$ *es una función totalmente continua tanto en el valor de su función como en el valor de sus derivadas normales a través de* Σ.

□

Cuando se satisface la ecuación (3.3.7) se tiene que $u = u_C + u_\Sigma = \hat{\mathrm{v}} + u_P + u_\Sigma$ es la solución del *BVPJ general* en el interior de cada subdominio Ω_i (en el método de Petrov-Galerkin no se requiere del procedimiento de interpolación óptima).