Capítulo 4:

FEM

con

Funciones Óptimas:

FEM-OF

Indice:

4.1.- FEM con Funciones Óptimas (FEM-OF)

La forma en que se implementan numéricamente las *formulaciones débiles alternativas* planteadas en la sección 3.3, es mediante los ***Métodos de Elementos Finitos con Funciones Óptimas*** **(FEM-OF[1])**. Su característica esencial es que los espacios de funciones óptimas $\widehat{O_B}$ y $\widehat{O_T}$, que en general son de dimensión infinita, se reemplazan por otros ***espacios de dimensión finita***. Los detalles se describen a continuación.

En la práctica, los espacios de funciones óptimas de base $\widehat{O_B} \subset \widehat{D_1}(\Omega) \equiv \widehat{H^2}(\Omega)$ y de funciones óptimas de peso $\widehat{O_T} \subset \widehat{D_2}(\Omega) \equiv \widehat{H^2}(\Omega)$, que para problemas con más de una variable independiente son de dimensión infinita, se necesita proyectarlos en ***espacios de dimensión finita***, $\overline{O_B} \subset \widehat{O_B} \subset \widehat{D_1}(\Omega)$ y $\overline{O_T} \subset \widehat{O_T} \subset \widehat{D_2}(\Omega)$. Lo anterior introduce una primera fuente de error: un ***error de proyección***. Estos espacios de dimensión finita $\overline{O_B}$ y $\overline{O_T}$, están formados por las funciones óptimas cuyas trazas en la frontera interior Σ son polinomios por tramos de grado G_Σ. Sin embargo, si se desea trabajar en estos espacios se requiere satisfacer las condiciones impuestas por los espacios nulos N_P y N_Q, las cuales involucran la ***solución analítica*** *–solución exacta-* de las ecuaciones diferenciales homogéneas $\mathcal{L}\,\mathrm{v} = 0$ y $\mathcal{L}^{*} w = 0$ respectivamente. Por este motivo, a las funciones que pertenecen a estos espacios se les llamará ***funciones óptimas exactas***. Sin embargo, calcular dichas soluciones exactas en general no es posible.

[1] Finite Element Method with Optimal Functions

Como consecuencia de la dificultad anterior, se introducen otros dos espacios de funciones también de dimensión finita $\widetilde{O_B} \subset \widehat{D_1}(\Omega)$ y $\widetilde{O_T} \subset \widehat{D_2}(\Omega)$, que aproximan a los espacios de funciones óptimas $\overline{O_B}$ y $\overline{O_T}$. Lo anterior introduce una segunda fuente de error: un ***error de aproximación***. Estos espacios de dimensión finita $\widetilde{O_B} \not\subset \overline{O_B}$ y $\widetilde{O_T} \not\subset \overline{O_T}$, que ya no consisten de funciones óptimas, ahora están formados por funciones polinomiales por tramos de grado G_Ω en cada subdominio Ω_i de la partición y cuyas trazas en la frontera interior Σ son polinomios por tramos de grado G_Σ. En estos espacios solamente es posible satisfacer de forma aproximada las condiciones impuestas por los espacios nulos N_P y N_Q, calculando una ***solución numérica*** de las ecuaciones diferenciales homogéneas $\mathcal{L}\,\mathrm{v}=0$ y $\mathcal{L}^{*}w=0$ respectivamente, con ayuda de métodos numéricos adecuados. Por este motivo y por analogía, a las funciones que pertenecen a estos espacios se les llamará ***funciones óptimas aproximadas***, aunque en realidad no sean *óptimas*.

Hasta el momento se ha privilegiado el uso de métodos numéricos de colocación ortogonal (*colocación-TH*). Sin embargo, las metodologías FEM-OF utilizan precisamente métodos de elementos finitos para resolver los BVPJ localizados que definen las funciones óptimas.

A continuación se describen las tres versiones de la metodología FEM-OF:

- FEM-OF Steklov-Poincaré,
- FEM-OF Trefftz-Herrera, y
- FEM-OF Petrov-Galerkin.

4.2.- FEM-OF Steklov-Poincare

4.2.1.- Objetivo

El objetivo de FEM-OF Steklov-Poincaré es el siguiente. Sea el BVPJ *básico* (3.3.1)-(3.3.2). Sea $\hat{\mathrm{v}} \in \widehat{O_B}$ la información buscada de la solución en Σ. Se busca una función $\overline{\mathrm{v}} \in \overline{O_B} \equiv \overline{N_P} \cap \overline{N_B} \cap \overline{N_{R_J}} \subset \widehat{D_1}(\Omega) \cap \widehat{D_2}(\Omega)$ tal que:

$$\left\langle (P-B-J)\overline{\mathrm{v}}, \overline{w} \right\rangle = \left\langle f - Pu_\Sigma, \overline{w} \right\rangle - \left\langle (P-B-J)u_P, \overline{w} \right\rangle \quad , \forall \overline{w} \in \overline{O_B} \tag{4.2.1}$$

Entonces $S_K^* \overline{\mathrm{v}} \approx S_K^* \hat{\mathrm{v}}$ y la solución del BVPJ *general* en el interior de cada subdominio Ω_i es $u \approx \overline{\mathrm{v}} + u_P + u_\Sigma$.

4.2.2.- Implementación

Para implementar FEM-OF Steklov-Poincaré se introducen los siguientes elementos. Sea una base $\left\{\overline{\mathrm{v}^1}, \overline{\mathrm{v}^2}, ..., \overline{\mathrm{v}^N}\right\}$ del espacio de funciones óptimas de base $\overline{O_B} \equiv \overline{N_P} \cap \overline{N_B} \cap \overline{N_{R_J}}$ de dimensión N, en consecuencia:

$$\overline{O_B} = \text{generado}\left\{\overline{\mathrm{v}^1}, \overline{\mathrm{v}^2}, ..., \overline{\mathrm{v}^N}\right\} \tag{4.2.2}$$

Sea la función $\overline{\mathrm{v}} \in \overline{O_B}$ una representación de la información buscada $\hat{\mathrm{v}} \in \widehat{O_B}$, en términos de una combinación lineal de la base $\left\{\overline{\mathrm{v}^1}, \overline{\mathrm{v}^2}, ..., \overline{\mathrm{v}^N}\right\}$ de $\overline{O_B}$, esto es:

$$\hat{\mathrm{v}} \approx \overline{\mathrm{v}} = \sum_{\beta=1}^{N} C_\beta \overline{\mathrm{v}^\beta} \tag{4.2.3}$$

Para obtener sistemas de ecuaciones determinados, se requiere trabajar con un espacio de funciones de peso también de dimensión N. Entonces se elige como espacio de funciones de peso de dimensión N al espacio de funciones óptimas de base:

$$\overline{O_T} \equiv \overline{O_B} = \text{generado}\left\{\overline{\mathrm{v}^1}, \overline{\mathrm{v}^2}, ..., \overline{\mathrm{v}^N}\right\} \tag{4.2.4}$$

Entonces, los coeficientes $\{C_1, C_2, ..., C_N\}$ de (4.2.3) satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{\beta=1}^{N} C_\beta \left\langle (P-B-J)\overline{\mathrm{v}^\beta}, \overline{\mathrm{v}^\alpha} \right\rangle = \left\langle f - Pu_\Sigma, \overline{\mathrm{v}^\alpha} \right\rangle - \left\langle (P-B-J)u_P, \overline{\mathrm{v}^\alpha} \right\rangle$$

$$\text{para} \quad \alpha = 1, 2, ..., N \tag{4.2.5}$$

El cual en su forma matricial es:

$$\underline{\underline{A}}\ \underline{C} = \underline{B} \tag{4.2.6}$$

donde los elementos del vector de incógnitas $\underline{C} = \left[\!\left[C_\beta \right]\!\right]$ de tamaño N son los coeficientes C_β que ponderan la combinación lineal, los elementos de la matriz de coeficientes $\underline{\underline{A}} = \left[\!\left[A_{\alpha\beta} \right]\!\right]$ de tamaño $N \times N$ son:

$$A_{\alpha\beta} = \left\langle (P-B-J)\overline{\mathrm{v}^\beta}, \overline{\mathrm{v}^\alpha} \right\rangle \tag{4.2.7}$$

y los elementos del vector de términos independientes $\underline{B} = \left[\!\left[B_\alpha \right]\!\right]$ de tamaño N son:

$$B_\alpha = \left\langle f - Pu_\Sigma, \overline{\mathrm{v}^\alpha} \right\rangle - \left\langle (P-B-J)u_P, \overline{\mathrm{v}^\alpha} \right\rangle \tag{4.2.8}$$

Finalmente, para las aplicaciones numéricas se reemplaza el espacio de funciones óptimas exactas $\overline{O_B}$ por el espacio de funciones óptimas aproximadas $\widetilde{O_B} \equiv \widetilde{N_P} \cap \widetilde{N_B} \cap \widetilde{N_{R_J}}$.

4.3.- FEM-OF Trefftz-Herrera

4.3.1.- Objetivo

El objetivo de FEM-OF Trefftz-Herrera es el siguiente. Sea el BVPJ *básico* (3.3.1)-(3.3.2). Sea $\hat{\mathrm{v}} \in \widehat{O_T}$ la información buscada de la solución en Σ. Se busca una función $\overline{\mathrm{v}} \in \overline{O_T} \equiv \overline{N_Q} \cap \overline{N_C} \cap \overline{N_{R_K}} \subset \widehat{D_1}(\Omega) \cap \widehat{D_2}(\Omega)$ tal que:

$$\left\langle (P-B-J)\overline{\mathrm{v}}, \overline{w} \right\rangle = \left\langle f - Pu_\Sigma, \overline{w} \right\rangle - \left\langle (P-B-J)u_P, \overline{w} \right\rangle \quad , \forall \overline{w} \in \overline{O_T} \tag{4.3.1}$$

Entonces $S_K^* \overline{\mathrm{v}} \approx S_K^* \hat{\mathrm{v}}$ y la solución del BVPJ *general* en el interior de cada subdominio Ω_i requiere del procedimiento de *interpolación óptima*.

4.3.2.- Implementación

Para implementar FEM-OF Trefftz-Herrera se introducen los siguientes elementos. Sea una base $\left\{ \overline{w^1}, \overline{w^2}, ..., \overline{w^N} \right\}$ del espacio de funciones óptimas de prueba $\overline{O_T} \equiv \overline{N_Q} \cap \overline{N_C} \cap \overline{N_{R_K}}$, de dimensión N, en consecuencia:

$$\overline{O_T} = \text{generado}\left\{ \overline{w^1}, \overline{w^2}, ..., \overline{w^N} \right\} \tag{4.3.2}$$

Para obtener sistemas de ecuaciones determinados, se requiere trabajar con un espacio de funciones de base también de dimensión N. Entonces se elige como espacio de funciones de base de dimensión N al espacio de funciones óptimas de peso:

$$\overline{O_B} \equiv \overline{O_T} = \text{generado}\left\{\overline{w^1}, \overline{w^2}, ..., \overline{w^N}\right\} \tag{4.3.3}$$

Sea la función $\overline{\mathrm{v}} \in \overline{O_T}$ una representación de la información buscada $\hat{\mathrm{v}} \in \widehat{O_T}$, en términos de una combinación lineal de la base $\left\{\overline{w^1}, \overline{w^2}, ..., \overline{w^N}\right\}$ de $\overline{O_T}$, esto es:

$$\hat{\mathrm{v}} \approx \overline{\mathrm{v}} = \sum_{\beta=1}^{N} C_\beta \overline{w^\beta} \tag{4.3.4}$$

Entonces, los coeficientes $\{C_1, C_2, ..., C_N\}$ de (4.3.4) satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{\beta=1}^{N} C_\beta \left\langle (P-B-J)\overline{w^\beta}, \overline{w^\alpha} \right\rangle = \left\langle f - Pu_\Sigma, \overline{w^\alpha} \right\rangle - \left\langle (P-B-J)u_P, \overline{w^\alpha} \right\rangle$$

$$\text{para} \quad \alpha = 1, 2, ..., N \tag{4.3.5}$$

El cual en su forma matricial es:

$$\underline{\underline{A}}\ \underline{C} = \underline{B} \tag{4.3.6}$$

donde los elementos del vector de incógnitas $\underline{C} = [\![C_\beta]\!]$ de tamaño N son los coeficientes C_β que ponderan la combinación lineal, los elementos de la matriz de coeficientes $\underline{\underline{A}} = [\![A_{\alpha\beta}]\!]$ de tamaño $N \times N$ son:

$$A_{\alpha\beta} = \left\langle (P-B-J)\overline{w^\beta}, \overline{w^\alpha} \right\rangle \tag{4.3.7}$$

y los elementos del vector de términos independientes $\underline{B} = [\![B_\alpha]\!]$ de tamaño N son:

$$B_\alpha = \left\langle f - Pu_\Sigma, \overline{w^\alpha} \right\rangle - \left\langle (P-B-J)u_P, \overline{w^\alpha} \right\rangle \tag{4.3.8}$$

Finalmente, para las aplicaciones numéricas se reemplaza el espacio de funciones óptimas exactas $\overline{O_T}$ por el espacio de funciones óptimas aproximadas $\widetilde{O_T} \equiv \widetilde{N_Q} \cap \widetilde{N_C} \cap \widetilde{N_{R_K}}$.

4.4.- FEM-OF Petrov-Galerkin

4.4.1.- Objetivo

El objetivo de FEM-OF Petrov-Galerkin es el siguiente. Sea el BVPJ *básico* (3.3.1)-(3.3.2). Sea $\hat{\mathrm{v}} \in \widehat{O_B}$ la información buscada de la solución en Σ. Se busca una función $\overline{\mathrm{v}} \in \overline{O_B} \equiv \overline{N_P} \cap \overline{N_B} \cap \overline{N_{R_J}} \subset \widehat{D_1}(\Omega)$ tal que:

$$\left\langle (P-B-J)\overline{\mathrm{v}}, \overline{w} \right\rangle = \left\langle f - Pu_\Sigma, \overline{w} \right\rangle - \left\langle (P-B-J)u_P, \overline{w} \right\rangle \quad , \forall \overline{w} \in \overline{O_T} \tag{4.4.1}$$

donde $\overline{O_T} \equiv \overline{N_Q} \cap \overline{N_C} \cap \overline{N_{R_K}} \subset \widehat{D_2}(\Omega)$. Entonces $S_K^* \overline{\mathrm{v}} \approx S_K^* \hat{\mathrm{v}}$ y la solución del BVPJ *general* en el interior de cada subdominio Ω_i es $u \approx \overline{\mathrm{v}} + u_P + u_\Sigma$.

4.4.2.- Implementación

Para implementar FEM-OF Petrov-Galerkin se introducen los siguientes elementos. Sea una base $\left\{ \overline{\mathrm{v}^1}, \overline{\mathrm{v}^2}, ..., \overline{\mathrm{v}^N} \right\}$ del espacio de funciones óptimas de base $\overline{O_B} \equiv \overline{N_P} \cap \overline{N_B} \cap \overline{N_{R_J}}$ de dimensión N, en consecuencia:

$$\overline{O_B} = \text{generado}\left\{ \overline{\mathrm{v}^1}, \overline{\mathrm{v}^2}, ..., \overline{\mathrm{v}^N} \right\} \tag{4.4.2}$$

Sea la función $\overline{\mathrm{v}} \in \overline{O_B}$ una representación de la información buscada $\hat{\mathrm{v}} \in \widehat{O_B}$, en términos de una combinación lineal de la base $\left\{ \overline{\mathrm{v}^1}, \overline{\mathrm{v}^2}, ..., \overline{\mathrm{v}^N} \right\}$ de $\overline{O_B}$, esto es:

$$\hat{\mathrm{v}} \approx \overline{\mathrm{v}} = \sum_{\beta=1}^{N} C_\beta \overline{\mathrm{v}^\beta} \tag{4.4.3}$$

Sea una base $\left\{\overline{w^1},\overline{w^2},...,\overline{w^N}\right\}$ del espacio de funciones óptimas de prueba $\overline{O_T} \equiv \overline{N_Q} \cap \overline{N_C} \cap \overline{N_{R_K}}$, de dimensión N , en consecuencia:

$$\overline{O_T} = \text{generado}\left\{\overline{w^1},\overline{w^2},...,\overline{w^N}\right\} \tag{4.4.4}$$

Entonces, los coeficientes $\{C_1, C_2, ..., C_N\}$ de (4.4.4) satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{\beta=1}^{N} C_\beta \left\langle (P-B-J)\overline{\mathrm{v}^\beta}, \overline{w^\alpha} \right\rangle = \left\langle f - Pu_\Sigma, \overline{w^\alpha} \right\rangle - \left\langle (P-B-J)u_P, \overline{w^\alpha} \right\rangle$$

$$\text{para} \quad \alpha = 1,2,...,N \tag{4.4.5}$$

El cual en su forma matricial es:

$$\underline{\underline{A}}\ \underline{C} = \underline{B} \tag{4.4.6}$$

donde los elementos del vector de incógnitas $\underline{C} = [\![C_\beta]\!]$ de tamaño N son los coeficientes C_β que ponderan la combinación lineal, los elementos de la matriz de coeficientes $\underline{\underline{A}} = [\![A_{\alpha\beta}]\!]$ de tamaño $N \times N$ son:

$$A_{\alpha\beta} = \left\langle (P-B-J)\overline{\mathrm{v}^\beta}, \overline{w^\alpha} \right\rangle \tag{4.4.7}$$

y los elementos del vector de términos independientes $\underline{B} = [\![B_\alpha]\!]$ de tamaño N son:

$$B_\alpha = \left\langle f - Pu_\Sigma, \overline{w^\alpha} \right\rangle - \left\langle (P-B-J)u_P, \overline{w^\alpha} \right\rangle \tag{4.4.8}$$

Finalmente, para las aplicaciones numéricas se reemplazan los espacios de funciones óptimas exactas $\overline{O_B}$ y $\overline{O_T}$, por los espacios de funciones óptimas aproximadas $\widetilde{O_B} \equiv \widetilde{N_P} \cap \widetilde{N_B} \cap \widetilde{N_{R_J}}$ y $\widetilde{O_T} \equiv \widetilde{N_Q} \cap \widetilde{N_C} \cap \widetilde{N_{R_K}}$, respectivamente.

4.5.- FEM-OF para el Caso Simétrico

Para el caso simétrico se tiene que el ***operador diferencial*** es ***autoadjunto***, esto es:

$$\mathcal{L}\, u = \mathcal{L}^{*} u \tag{4.5.1}$$

y, en consecuencia, las funcionales bilineales asociadas cumplen con las siguientes igualdades:

$$\langle Pu, w\rangle = \langle Qu, w\rangle \tag{4.5.2}$$

$$\langle Bu, w\rangle = \langle Cu, w\rangle \tag{4.5.3}$$

$$\langle Ju, w\rangle = \langle Ku, w\rangle \tag{4.5.4}$$

inclusive:

$$\langle S_J u, w\rangle = \langle S_K u, w\rangle \tag{4.5.5}$$

$$\langle R_J u, w\rangle = \langle R_K u, w\rangle \tag{4.5.6}$$

Por lo tanto, el espacio de funciones óptimas de base $\overline{O_B}$ es igual al espacio de funciones óptimas de peso $\overline{O_T}$:

$$\overline{O_B} \equiv \overline{N_P} \cap \overline{N_B} \cap \overline{N_{R_J}} = \overline{N_Q} \cap \overline{N_C} \cap \overline{N_{R_K}} \equiv \overline{O_T} \tag{4.5.7}$$

y una propiedad importante para el caso simétrico es que las tres versiones de FEM-OF resultan ser las mismas.

Además, se tiene que la siguiente funcional bilineal es ***simétrica*** :

$$\left\langle (P-B-J)\overline{\mathrm{v}}, \overline{w}\right\rangle = \left\langle (P-B-J)\overline{w}, \overline{\mathrm{v}}\right\rangle \tag{4.5.8}$$

Demostración:

Por las igualdades (4.5.2)-(4.5.4) se tiene que:

$$\left\langle \left(P-B-J\right)\overline{\mathrm{v}},\overline{w}\right\rangle = \left\langle \left(Q-C-K\right)\overline{\mathrm{v}},\overline{w}\right\rangle$$

Calculando el transpuesto se tiene que:

$$\left\langle \left(Q-C-K\right)\overline{\mathrm{v}},\overline{w}\right\rangle = \left\langle \left(Q-C-K\right)^{*}\overline{w},\overline{\mathrm{v}}\right\rangle$$

Finalmente, por las fórmulas de Green-Herrera se tiene que:

$$\left\langle \left(Q-C-K\right)^{*}\overline{w},\overline{\mathrm{v}}\right\rangle = \left\langle \left(P-B-J\right)\overline{w},\overline{\mathrm{v}}\right\rangle$$

□

De esta forma, la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones que se deriva aplicando el método FEM-OF es simétrica. Además, si la funcional bilineal $\left\langle \left(P-B-J\right)\overline{\mathrm{v}},\overline{w}\right\rangle$ es ***positiva-definida***, dicha matriz de coeficientes también lo será. Estas propiedades son de mucha relevancia, ya que se puede aplicar el ***Método de Gradiente Conjugado*** **(CGM[1])** [52, 53] para resolver el sistema de ecuaciones.

[1] Conjugate Gradient Method