Capítulo 8:

Análisis

del

Error

Indice:

8.- Análisis del Error

Sea $\widehat{O_B} \equiv N_P \bigcap N_B \bigcap N_{R_J} \subset \widehat{D_1}(\Omega)$ el espacio de funciones óptimas de base (exactas) de dimensión infinita; en este espacio se satisface (exactamente) la condición impuesta por el espacio nulo N_P. Sea $\hat{u} \in \widehat{O_B}$ la información buscada (exacta).

Dentro del espacio de funciones óptimas de base de dimensión infinita $\widehat{O_B}$, se elige un espacio de funciones óptimas de base pero de dimensión finita $\overline{O_B} \subset \widehat{O_B}$; en este espacio también se satisface (exactamente) la condición impuesta por el espacio nulo N_P, pero las trazas de sus funciones en la frontera interior Σ son polinomios por tramos. Sea $\bar{u} \in \overline{O_B}$ la proyección de la información buscada en $\overline{O_B}$. Entonces se ha introducido una primera fuente de error: un error de proyección.

Ahora bien, el espacio de funciones óptimas de base de dimensión finita $\overline{O_B}$, se aproxima con un espacio de funciones de base también de dimensión finita $\widetilde{O_B} \subset \widehat{D_1}(\Omega)$, pero cuyas funciones ya no son óptimas. En este espacio se satisface aproximadamente la condición impuesta por el espacio nulo N_P, ya que sus funciones están formadas en el interior de los subdominios Ω_i por polinomios por tramos (sus trazas en Σ también son polinomios por tramos). De aquí que $\widetilde{O_B} \not\subset \widehat{O_B}$. Sea $\tilde{u} \in \widetilde{O_B}$ la aproximación de la información buscada en $\widetilde{O_B}$. Entonces, se ha introducido una segunda fuente de error: un error de aproximación.

Sea $\overline{O_T} \equiv N_Q \cap N_C \cap N_{R_K} \subset \widehat{D_2}(\Omega)$ el espacio de funciones óptimas de peso (exactas) de dimensión finita; en este espacio se satisface (exactamente) la condición impuesta por el espacio nulo N_Q y las trazas de sus funciones en la frontera interior Σ son polinomios por tramos. Sea $\overline{w} \in \overline{O_T}$ una función óptima de peso (exacta).

Ahora bien, el espacio de funciones óptimas de peso de dimensión finita $\overline{O_T}$, se aproxima con un espacio de funciones de peso también de dimensión finita $\widetilde{O_T} \subset \widehat{D_2}(\Omega)$, pero cuyas funciones ya no son óptimas. En este espacio se satisface aproximadamente la condición impuesta por el espacio nulo N_Q, ya que sus funciones están formadas en el interior de los subdominios Ω_i por polinomios por tramos (sus trazas en Σ también son polinomios por tramos). De aquí que $\widetilde{O_T} \not\subset \overline{O_T}$. Sea $\widetilde{w} \in \widetilde{O_T}$ la aproximación de una función de peso óptima en $\widetilde{O_T}$.

Es importante hacer notar que las funciones de peso aproximadas $\widetilde{w} \in \widetilde{O_T}$ tienen las mismas trazas en Σ que las funciones óptimas de peso $\overline{w} \in \overline{O_T}$. De esta forma, al construir ambas se resuelve los mismos problemas locales bien planteados (con solución única), solo que en el caso de las funciones óptimas se obtiene una solución analítica y, en el otro caso, una solución aproximada con ayuda de algún método numérico (por ejemplo: FEM o colocación). Entonces se puede establecer una biyección entre las funciones de peso aproximadas y las funciones óptimas de peso.

Notación.- Se introduce la siguiente notación:

Sea $\overline{e} = \hat{u} - \overline{u}$ el error de proyección para la información buscada.

Sea $\tilde{e} = \overline{u} - \tilde{u}$ el error de aproximación para la información buscada.

Sea $e = \overline{e} + \tilde{e} = \hat{u} - \tilde{u}$ el error total para la información buscada.

Sea $\eta = \widetilde{w} - \overline{w}$ el error de aproximación para las funciones óptimas de peso.

Primero se harán los siguientes planteamientos básicos de los cuales parte este análisis del error. La información buscada $\hat{u} \in \widehat{O_B}$ cumple que:

$$-\left\langle S_K^* \hat{u}, \overline{w} \right\rangle = \left\langle f, \overline{w} \right\rangle \qquad \forall \overline{w} \in \overline{O_T} \tag{8.1}$$

Puesto que $\forall \overline{w} \in \overline{O_T}$ se tiene que $Q\overline{w} = 0$, consecuentemente $\left\langle Q^* \hat{u}, \overline{w} \right\rangle = 0$. Entonces de (8.1) se tiene que:

$$\left\langle \left(Q^* - S_K^* \right) \hat{u}, \overline{w} \right\rangle = \left\langle f, \overline{w} \right\rangle \qquad \forall \overline{w} \in \overline{O_T} \tag{8.2}$$

La proyección de la información buscada $\overline{u} \in \overline{O_B}$ también cumple que:

$$-\left\langle S_K^* \overline{u}, \overline{w} \right\rangle = \left\langle f, \overline{w} \right\rangle \qquad \forall \overline{w} \in \overline{O_T} \tag{8.3}$$

La aproximación de información buscada $\tilde{u} \in \widetilde{O_B}$ cumple que:

$$\left\langle \left(Q^* - S_K^* \right) \tilde{u}, \tilde{w} \right\rangle = \left\langle f, \tilde{w} \right\rangle \qquad \forall \tilde{w} \in \widetilde{O_T} \tag{8.4}$$

Debido a la biyección entre los elementos de $\overline{O_T}$ y $\widetilde{O_T}$, las afirmaciones $\forall \overline{w} \in \overline{O_T}$ y $\forall \tilde{w} \in \widetilde{O_T}$ son equivalentes. Entonces de (8.4) se tiene que:

$$\left\langle \left(Q^* - S_K^* \right) \tilde{u}, \tilde{w} \right\rangle = \left\langle f, \tilde{w} \right\rangle \qquad \forall \overline{w} \in \overline{O_T} \tag{8.5}$$

El objetivo de este análisis del error es que a partir de las expresiones (8.2), (8.3) y (8.5), las cuales involucran las funcionales $\left\langle S_K^* \hat{u}, \overline{w} \right\rangle$, $\left\langle S_K^* \overline{u}, \overline{w} \right\rangle$ y $\left\langle S_K^* \tilde{u}, \tilde{w} \right\rangle$ (la información buscada exacta, la proyección de la información buscada y la aproximación de la información buscada respectivamente), se deduzca la funcional $\left\langle S_K^* e, \overline{w} \right\rangle$ que representa el error total de la información buscada en la frontera interior Σ. Este objetivo se logra en el teorema 8.5, previamente desarrollando los lemas 8.1 al 8.4.

Lema 8.1.- Una expresión equivalente a (8.5):

$$\left\langle \left(Q^* - S_K^*\right)\tilde{u}, \tilde{w}\right\rangle = \left\langle f, \tilde{w}\right\rangle \qquad \forall \overline{w} \in \overline{O_T}$$

es:

$$-\left\langle S_K^* \tilde{u}, \overline{w}\right\rangle = -\left\langle \left(Q^* - S_K^*\right)\tilde{u}, \eta\right\rangle + \left\langle f, \tilde{w}\right\rangle \qquad \forall \overline{w} \in \overline{O_T} \tag{8.6}$$

Demostración.

En efecto, partiendo de (8.5):

$$\left\langle \left(Q^* - S_K^*\right)\tilde{u}, \tilde{w}\right\rangle = \left\langle f, \tilde{w}\right\rangle$$

Sustituyendo $\eta = \tilde{w} - \overline{w}$, *se tiene que:*

$$\left\langle \left(Q^* - S_K^*\right)\tilde{u}, \overline{w} + \eta\right\rangle = \left\langle f, \tilde{w}\right\rangle$$

$$\left\langle \left(Q^* - S_K^*\right)\tilde{u}, \overline{w}\right\rangle + \left\langle \left(Q^* - S_K^*\right)\tilde{u}, \eta\right\rangle = \left\langle f, \tilde{w}\right\rangle$$

$$\left\langle Q^* \tilde{u}, \overline{w}\right\rangle - \left\langle S_K^* \tilde{u}, \overline{w}\right\rangle = -\left\langle \left(Q^* - S_K^*\right)\tilde{u}, \eta\right\rangle + \left\langle f, \tilde{w}\right\rangle$$

Finalmente, considerando que $\forall \overline{w} \in \overline{O_T}$ *se tiene que* $Q\overline{w} = 0$, *entonces:*

$$-\left\langle S_K^* \tilde{u}, \overline{w}\right\rangle = -\left\langle \left(Q^* - S_K^*\right)\tilde{u}, \eta\right\rangle + \left\langle f, \tilde{w}\right\rangle$$

□

Lema 8.2.- Si se resta (8.3):

$$-\left\langle S_K^* \overline{u}, \overline{w}\right\rangle = \left\langle f, \overline{w}\right\rangle \qquad \forall \overline{w} \in \overline{O_T}$$

de (8.6):

$$-\left\langle S_K^* \tilde{u}, \overline{w}\right\rangle = -\left\langle \left(Q^* - S_K^*\right)\tilde{u}, \eta\right\rangle + \left\langle f, \tilde{w}\right\rangle \qquad \forall \overline{w} \in \overline{O_T}$$

se tiene que:

$$\left\langle S_K^* \tilde{e}, \overline{w}\right\rangle = -\left\langle \left(Q^* - S_K^*\right)\tilde{u}, \eta\right\rangle + \left\langle f, \eta\right\rangle \qquad \forall \overline{w} \in \overline{O_T} \tag{8.7}$$

Demostración:

En efecto, partiendo de (8.6):

$$-\left\langle S_K^* \tilde{u}, \overline{w}\right\rangle = -\left\langle \left(Q^* - S_K^*\right)\tilde{u}, \eta\right\rangle + \left\langle f, \tilde{w}\right\rangle$$

Restando (8.3) se tiene que:

$$-\left\langle S_K^* \tilde{u}, \overline{w} \right\rangle + \left\langle S_K^* \overline{u}, \overline{w} \right\rangle = -\left\langle \left(Q^* - S_K^* \right) \tilde{u}, \eta \right\rangle + \left\langle f, \tilde{w} \right\rangle - \left\langle f, \overline{w} \right\rangle$$

$$\left\langle S_K^* \left(\overline{u} - \tilde{u} \right), \overline{w} \right\rangle = -\left\langle \left(Q^* - S_K^* \right) \tilde{u}, \eta \right\rangle + \left\langle f, \left(\tilde{w} - \overline{w} \right) \right\rangle$$

Finalmente, sustituyendo $\tilde{e} = \overline{u} - \tilde{u}$ *y* $\eta = \tilde{w} - \overline{w}$*, se tiene que:*

$$\left\langle S_K^* \tilde{e}, \overline{w} \right\rangle = -\left\langle \left(Q^* - S_K^* \right) \tilde{u}, \eta \right\rangle + \left\langle f, \eta \right\rangle$$

□

Lema 8.3.- Si se sustituye (8.2):

$$\left\langle \left(Q^* - S_K^* \right) \hat{u}, \overline{w} \right\rangle = \left\langle f, \overline{w} \right\rangle \qquad \forall \overline{w} \in \overline{O_T}$$

en (8.7):

$$\left\langle S_K^* \tilde{e}, \overline{w} \right\rangle = -\left\langle \left(Q^* - S_K^* \right) \tilde{u}, \eta \right\rangle + \left\langle f, \eta \right\rangle \qquad \forall \overline{w} \in \overline{O_T}$$

se tiene que:

$$\left\langle S_K^* \tilde{e}, \overline{w} \right\rangle = \left\langle \left(Q^* - S_K^* \right) e, \eta \right\rangle \qquad \forall \overline{w} \in \overline{O_T} \tag{8.8}$$

Demostración:

En efecto, partiendo de (8.7):

$$\left\langle S_K^* \tilde{e}, \overline{w} \right\rangle = -\left\langle \left(Q^* - S_K^* \right) \tilde{u}, \eta \right\rangle + \left\langle f, \eta \right\rangle$$

Sustituyendo (8.2) se tiene que:

$$\left\langle S_K^* \tilde{e}, \overline{w} \right\rangle = -\left\langle \left(Q^* - S_K^* \right) \tilde{u}, \eta \right\rangle + \left\langle \left(Q^* - S_K^* \right) \hat{u}, \eta \right\rangle$$

$$\left\langle S_K^* \tilde{e}, \overline{w} \right\rangle = \left\langle \left(Q^* - S_K^* \right) \left(\hat{u} - \tilde{u} \right), \eta \right\rangle$$

Finalmente, sustituyendo $e = \hat{u} - \tilde{u}$ *, se tiene que*

$$\left\langle S_K^* \tilde{e}, \overline{w} \right\rangle = \left\langle \left(Q^* - S_K^* \right) e, \eta \right\rangle$$

□

Lema 8.4.- Una expresión equivalente a (8.8):

$$\left\langle S_K^* \tilde{e}, \overline{w} \right\rangle = \left\langle \left(Q^* - S_K^* \right) e, \eta \right\rangle \qquad \forall \overline{w} \in \overline{O_T}$$

es:

$$\left\langle S_K^* \tilde{e}, \overline{w} \right\rangle = \left\langle Pe, \eta \right\rangle \qquad \forall \overline{w} \in \overline{O_T} \tag{8.9}$$

Demostración:

Recuérdese que $e = \hat{u} - \tilde{u}$ *y* $\eta = \widetilde{w} - \overline{w}$.

En efecto, partiendo de la fórmula de Green-Herrera:

$$\left\langle \left(P - B - R_J - S_J \right) e, \eta \right\rangle = \left\langle \left(Q^* - C^* - R_K^* - S_K^* \right) e, \eta \right\rangle$$

se tiene lo siguiente:

$\left\langle Be, \eta \right\rangle = \left\langle B\left(\hat{u} - \tilde{u} \right), \eta \right\rangle = 0$ *ya que* $\hat{u} \in N_B \subset \widehat{O_B}$ *y por construcción* $\tilde{u} \in \widetilde{O_B}$ *satisface (exactamente) la condición* $B\tilde{u} = 0$, *ya que* $\tilde{u} = 0$ *en* $\partial\Omega$.

$\left\langle R_J e, \eta \right\rangle = \left\langle R_J \left(\hat{u} - \tilde{u} \right), \eta \right\rangle = 0$ *ya que* $\hat{u} \in N_{R_J} \subset \widehat{O_B}$ *y por construcción* $\tilde{u} \in \widetilde{O_B}$ *satisface (exactamente) la condición* $R_J \tilde{u} = 0$, *ya que* $\left[\tilde{u} \right] = 0$ *en* Σ.

$\left\langle C^* e, \eta \right\rangle = \left\langle C\eta, e \right\rangle = \left\langle C\left(\widetilde{w} - \overline{w} \right), e \right\rangle = 0$ *ya que* $\overline{w} \in N_C \subset \overline{O_T}$ *y por construcción* $\widetilde{w} \in \widetilde{O_T}$ *satisface (exactamente) la condición* $C\widetilde{w} = 0$, *ya que* $\widetilde{w} = 0$ *en* $\partial\Omega$.

$\left\langle R_K^* e, \eta \right\rangle = \left\langle R_K \eta, e \right\rangle = \left\langle R_K \left(\widetilde{w} - \overline{w} \right), e \right\rangle = 0$ *ya que* $\overline{w} \in N_{R_K} \subset \overline{O_T}$ *y por construcción* $\widetilde{w} \in \widetilde{O_T}$ *satisface (exactamente) la condición* $R_K \widetilde{w} = 0$, *ya que* $\left[\widetilde{w} \right] = 0$ *en* Σ.

Entonces, considerando las funcionales bilineales anteriores que se anulan en la fórmula de Green-Herrera se tiene que:

$$\left\langle \left(P - S_J \right) e, \eta \right\rangle = \left\langle \left(Q^* - S_K^* \right) e, \eta \right\rangle.$$

Ahora bien, el siguiente punto será de importancia fundamental para el análisis del error. Para el BVPJ elíptico de segundo orden se tiene que:

$$\left\langle S_J e, \eta \right\rangle = \left\langle S_J e, \widetilde{w} - \overline{w} \right\rangle = \int_\Sigma [\underline{a}_n \bullet \nabla e] \overline{\overset{\bullet}{\left(\widetilde{w} - \overline{w} \right)}} \, d\underline{x} = 0$$

puesto que existe una biyección entre los elementos de $\overline{O_T}$ *y* $\widetilde{O_T}$ *, ya que* $\overline{w} \in \overline{O_T}$ *tiene las mismas trazas en* Σ *que* $\widetilde{w} \in \widetilde{O_T}$ *. En consecuencia* $\widetilde{w} = \overline{w}$ *en* Σ *y* $\widetilde{w} - \overline{w} = 0$ *. Considerando lo anterior:*

$$\langle Pe, \eta \rangle = \left\langle \left(Q^* - S_K^* \right) e, \eta \right\rangle$$

Finalmente, sustituyendo el resultado previo en (8.8) se tiene que:

$$\left\langle S_K^* \tilde{e}, \overline{w} \right\rangle = \left\langle \left(Q^* - S_K^* \right) e, \eta \right\rangle = \langle Pe, \eta \rangle$$

□

Teorema 8.5.- Sea un BVPJ elíptico de segundo orden con solución única $u \in \widehat{O_B}$. Sea $\hat{u} \in \widehat{O_B}$ la información buscada de la solución en Σ. Sea $\overline{O_B}$ y $\overline{O_T}$ un espacio de funciones de base y de peso óptimas cuyas trazas en Σ son polinomios de grado 3 por tramos $G_\Sigma = 3$. Sea $\overline{u} \in \overline{O_B}$ la proyección de la información buscada. Sea $\widetilde{O_B}$ y $\widetilde{O_T}$ un espacio de funciones de base y de peso aproximadas cuyas trazas en Σ son polinomios de grado 3 por tramos $G_\Sigma = 3$, y cuyo interior en cada subdominio Ω_i son polinomios de grado 2 por tramos $G_\Omega = 2$. Sea $\tilde{u} \in \widetilde{O_B}$ la aproximación de la información buscada. Se utiliza FEM para resolver los problemas locales que definen a las funciones de base y de peso. Entonces el error total de la información buscada $e = \hat{u} - \tilde{u} = \overline{e} + \tilde{e}$ en Σ:

$$\left\langle S_K^* e, \overline{w} \right\rangle = \left\langle S_K^* \overline{e}, \overline{w} \right\rangle + \left\langle S_K^* \tilde{e}, \overline{w} \right\rangle \tag{8.10}$$

tiene un orden de convergencia h del error $O\left(h^4\right)$.

Demostración:

Con respecto al primer sumando de (8.10), $\left\langle S_K^* \overline{e}, \overline{w} \right\rangle = \left\langle S_K^* \left(\hat{u} - \overline{u} \right), \overline{w} \right\rangle$ *, éste es* $O\left(h^4\right)$ *porque* $\overline{u} \in \overline{O_B}$ *tiene trazas en* Σ *que son polinomios de grado 3 por tramos* $G_\Sigma = 3$ *.*

Con respecto al segundo sumando de (8.10), $\left\langle S_K^* \tilde{e}, \overline{w} \right\rangle$ *, se tiene lo siguiente. En el lema 8.3 se estableció que:* $\left\langle S_K^* \tilde{e}, \overline{w} \right\rangle = \left\langle \left(Q^* - S_K^*\right) e, \eta \right\rangle$ *. Luego, en el lema 8.4 se estableció que:* $\left\langle S_K^* \tilde{e}, \overline{w} \right\rangle = \left\langle \left(Q^* - S_K^*\right) e, \eta \right\rangle = \left\langle Pe, \eta \right\rangle$ *, utilizando el hecho de que* $\left\langle S_J e, \eta \right\rangle = 0$ *ya que existe una biyección entre* $\overline{w} \in \overline{O_T}$ *y* $\widetilde{w} \in \widetilde{O_T}$ *. Entonces resulta que:*

$$\left\langle S_K^* \tilde{e}, \overline{w} \right\rangle = \left\langle Pe, \eta \right\rangle = \sum_i \int_{\Omega_i} \left(\widetilde{w} - \overline{w}\right) \mathcal{L} \left(\hat{u} - \tilde{u}\right) d\underline{x}$$

es $O\left(h^4\right)$ *porque la aproximación de la información buscada* $\tilde{u} \in \widetilde{O_B}$ *y las funciones de peso aproximadas* $\widetilde{w} \in \widetilde{O_T}$ *son polinomios de grado 2 por tramos* $G_\Omega = 2$ *en el interior en cada subdominio* Ω_i *y fueron construidas resolviendo problemas locales con FEM. Esto es:* $\left(\widetilde{w} - \overline{w}\right)$ *y* $\left(\hat{u} - \tilde{u}\right)$ *son* $O\left(h^3\right)$*;* $\mathcal{L} \left(\hat{u} - \tilde{u}\right)$ *es* $O\left(h^1\right)$ *porque el operador diferencial es de 2º orden; el producto* $\left(\widetilde{w} - \overline{w}\right) \mathcal{L} \left(\hat{u} - \tilde{u}\right)$ *es* $O\left(h^4\right)$*; finalmente, la integración aumenta de orden pero la sumatoria lo disminuye de igual manera, por lo que éste no se altera.*

En conclusión, la suma: $\left\langle S_K^* e, \overline{w} \right\rangle = \left\langle S_K^* \overline{e} + \tilde{e}, \overline{w} \right\rangle = \left\langle S_K^* \overline{e}, \overline{w} \right\rangle + \left\langle S_K^* \tilde{e}, \overline{w} \right\rangle$ *, tiene un orden de convergencia* h *del error* $O\left(h^4\right)$*.*

□