Capítulo 9:

Conclusiones

Indice:

9.1- Conclusiones

1.- El Método de Elementos Finitos con Funciones Óptimas (FEM-OF) presentado en este trabajo es una forma de implementar una teoría general de Métodos de Elementos Finitos formulada con funciones de base y de peso discontinuas definidas por tramos, de modo que éstas puedan ser totalmente discontinuas a través de las fronteras interiores que separan los elementos de la partición de un dominio. En este tipo de espacios se formulan problemas de contorno con saltos prescritos (BVPJ).

2.- Se presenta un marco teórico unificado para el desarrollo de los métodos directos y de los métodos indirectos: el marco teórico de las Funciones Óptimas. Aunque estos métodos se relacionan a través de las formulas de Green-Herrera $P-B-J=Q^*-C^*-K^*$, se habían desarrollado por separado. Específicamente, el marco teórico unificado se desarrolla a partir de la introducción de una pareja de descomposiciones duales de los operadores: $S_J+R_J\equiv J$ y $S_K+R_K\equiv K$. Con base en estas descomposiciones duales se definen los espacios de funciones óptimas de base $\widehat{O_B}\equiv N_P\bigcap N_B\bigcap N_{R_J}\subset\widehat{D_1}(\Omega)$ y de funciones óptimas de peso $\widehat{O_T}\equiv N_Q\bigcap N_C\bigcap N_{R_K}\subset\widehat{D_2}(\Omega)$. En el espacio de funciones óptimas se cumple la siguiente propiedad: $\langle S_J\mathrm{v},w\rangle=\langle S_K^*\mathrm{v},w\rangle$, $\forall(\mathrm{v},w)\in\widehat{O_B}(\Omega)\times\widehat{O_T}(\Omega)$, la cual significa que una función óptima de base contiene la información buscada de la solución si y solo si cumple con las condiciones de continuidad de Poincaré-Steklov en la frontera interior Σ.

3.- Con base en el marco teórico de las Funciones Óptimas, se presenta una familia de métodos, cuyos miembros se diferencian entre sí por el uso diferente de los espacios especializados de funciones de base y de funciones de peso. Los métodos presentados son: el método indirecto de Trefftz-Herrera, el método directo de Steklov-Poincaré y el método de Petrov-Galerkin. La diferencia entre ellos es la siguiente. El método indirecto Trefftz-Herrera utiliza solamente funciones óptimas de peso; el método directo de Steklov-Poincaré utiliza solamente funciones óptimas de base; el método de Petrov-Galerkin utiliza tanto funciones óptimas de base como funciones óptimas de peso.

4.- Sea el BVPJ con condiciones de frontera homogéneas ($g = 0$):

$$\left(P - B - J\right)u = f - j$$

con condiciones de saltos prescritos $j \equiv Ju_{\Sigma}$. Entonces su formulación débil (alternativa) que se propone para el marco teórico de las Funciones Óptimas es:

$$\left\langle \left(P - B - J\right)\hat{\mathrm{v}}, w\right\rangle = \left\langle f - Pu_{\Sigma}, w\right\rangle - \left\langle \left(P - B - J\right)u_P, w\right\rangle \quad , \forall w \in \widehat{O_T}$$

donde la información buscada en la frontera interior Σ es $\hat{\mathrm{v}} \in \widehat{O_B}$ y la solución del BVPJ en todo el dominio Ω es $u = \hat{\mathrm{v}} + u_P + u_{\Sigma}$. A esta misma formulación débil alternativa se le puede aplicar cualquiera de los tres métodos mencionados anteriormente; la diferencia radica en la forma de utilizar los espacios de funciones óptimas.

5.- La forma de implementar numéricamente las formulaciones débiles alternativas es mediante los Métodos de Elementos Finitos con Funciones Óptimas. La manera de hacerlo es sustituyendo los espacios de funciones óptimas $\widehat{O_B}$ y $\widehat{O_T}$ de dimensión infinita, por otros espacios de funciones óptimas $\overline{O_B}$ y $\overline{O_T}$ pero de dimensión finita. Éstos últimos son espacios cuyas funciones poseen trazas que son polinomios por tramos en la frontera interior Σ. De esta forma se introduce un error de proyección. Así, para cada una de las metodología mencionadas anteriormente, se introduce un Método de Elementos Finitos con Funciones Óptimas particular: FEM-OF Trefftz-Herrera, FEM-OF Steklov-Poincaré y FEM-OF Petrov-Galerkin.

6.- Si se aplica la metodología de discretización FEM-OF en las formulaciones débiles alternativas se obtiene lo siguiente. Sea una base del espacio de funciones óptimas de base de dimensión N tal que $\overline{O_B} = \text{generado}\left\{ \overline{\mathrm{v}^1}, \overline{\mathrm{v}^2}, ..., \overline{\mathrm{v}^N} \right\}$. Sea una base del espacio de funciones óptimas de peso de dimensión N tal que $\overline{O_T} = \text{generado}\left\{ \overline{w^1}, \overline{w^2}, ..., \overline{w^N} \right\}$. Sea $\overline{\mathrm{v}}$ la representación de la información buscada $\hat{\mathrm{v}} \in \widehat{O_B}$ en el espacio $\overline{O_B}$: $\hat{\mathrm{v}} \approx \overline{\mathrm{v}} = \sum_{\beta=1}^{N} C_\beta \overline{\mathrm{v}^\beta}$.

Entonces, los coeficientes $\{C_1, C_2, ..., C_N\}$ satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{\beta=1}^{N} C_\beta \left\langle (P-B-J)\overline{\mathrm{v}^\beta}, \overline{w^\alpha} \right\rangle = \left\langle f - Pu_\Sigma, \overline{w^\alpha} \right\rangle - \left\langle (P-B-J)u_P, \overline{w^\alpha} \right\rangle$$

para $\alpha = 1, 2, ..., N$

Como ya se mencionó, la diferencia entre los tres métodos FEM-OF mencionados anteriormente radica en la forma de utilizar los espacios de funciones óptimas.

7.- Para el caso simétrico, esto es, cuando el operador diferencial es autoadjunto, los espacios de funciones óptimas $\overline{O_B}$ y $\overline{O_T}$ son iguales. Esto provoca que los tres métodos FEM-OF Trefftz-Herrera, FEM-OF Petrov-Galerkin y FEM-OF Steklov-Poincaré sean esencialmente el mismo método. Adicionalmente se tiene que la funcional $\left\langle (P-B-J)\overline{\mathrm{v}}, \overline{w} \right\rangle = \left\langle (P-B-J)\overline{w}, \overline{\mathrm{v}} \right\rangle$ es simétrica. Si además el operador diferencial es positivo definido, la funcional $\left\langle (P-B-J)\overline{\mathrm{v}}, \overline{w} \right\rangle$ genera una matriz de coeficientes simétrica y positiva definida para el sistema de ecuaciones.

8.- Para el caso no simétrico, esto es, cuando el operador diferencial no es autoadjunto, los espacios de funciones óptimas $\overline{O_B}$ y $\overline{O_T}$ son diferentes. Esto provoca que los tres métodos FEM-OF Trefftz-Herrera, FEM-OF Petrov-Galerkin y FEM-OF Steklov-Poincaré sean diferentes métodos. Particularmente, el método FEM-OF Petrov-Galerkin cobra relevancia ya que se trabaja efectivamente con espacios de funciones óptimas de base y óptimas de peso distintos. En la práctica, cuando se trabaja con una aproximación de las funciones óptimas (y no con las funciones óptimas "exactas"), el hecho de utilizar espacios de funciones de base y de peso diferentes mejora la precisión de los algoritmos.

9.- Al aplicar la metodología FEM-OF a un BVPJ elíptico general de 2° orden:

$$\mathcal{L}\; u \equiv -\nabla \bullet \left(\underline{\underline{a}} \bullet \nabla u \right) + \nabla \bullet \left(\underline{b} u \right) + cu = f_{\Omega} \qquad \text{en cada } \Omega_i$$

con condiciones de frontera tipo Dirichlet homogéneas, con condiciones de saltos prescritos $[u] = j_{\Sigma}^{0}$ y $\left[\underline{a}_n \bullet \nabla u \right] = j_{\Sigma}^{1}$ en Σ, e información buscada el promedio de la solución en Σ, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{\beta=1}^{N} C_{\beta} \left(\sum_{i=1}^{E} \int_{\Omega_i} \left\{ \nabla \overline{\mathrm{v}^{\beta}} \bullet \underline{\underline{a}} \bullet \nabla \overline{w^{\alpha}} - \overline{\mathrm{v}^{\beta}} \underline{b} \bullet \nabla \overline{w^{\alpha}} + c \overline{\mathrm{v}^{\beta}}\, \overline{w^{\alpha}} \right\} d\underline{x} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{E} \int_{\Omega_i} \left(f_{\Omega} - \mathcal{L}\; u_{\Sigma} \right) \overline{w^{\alpha}} d\underline{x} - \sum_{i=1}^{E} \int_{\Omega_i} \left\{ \nabla u_P \bullet \underline{\underline{a}} \bullet \nabla \overline{w^{\alpha}} - u_P \underline{b} \bullet \nabla \overline{w^{\alpha}} + c u_P \overline{w^{\alpha}} \right\} d\underline{x}$$

$$\text{para } \alpha = 1, 2, ..., N$$

el cual en su forma matricial es $\underline{\underline{A}}\; \underline{C} = \underline{B}$, donde los elementos del vector de incógnitas $\underline{C} = \left[\!\left[C_{\beta} \right]\!\right]$ de tamaño N son los coeficientes C_{β}, los elementos de la matriz de coeficientes $\underline{\underline{A}} = \left[\!\left[A_{\alpha\beta} \right]\!\right]$ de tamaño $N \times N$ son:

$$A_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{E} \int_{\Omega_i} \left\{ \nabla \overline{\mathrm{v}^{\beta}} \bullet \underline{\underline{a}} \bullet \nabla \overline{w^{\alpha}} - \overline{\mathrm{v}^{\beta}} \underline{b} \bullet \nabla \overline{w^{\alpha}} + c \overline{\mathrm{v}^{\beta}}\, \overline{w^{\alpha}} \right\} d\underline{x}$$

y los elementos del vector de términos independientes $\underline{B} = \left[\!\left[B_{\alpha} \right]\!\right]$ de tamaño N son:

$$B_{\alpha} = \sum_{i=1}^{E} \int_{\Omega_i} \left(f_{\Omega} - \mathcal{L}\; u_{\Sigma} \right) \overline{w^{\alpha}} d\underline{x} - \sum_{i=1}^{E} \int_{\Omega_i} \left\{ \nabla u_P \bullet \underline{\underline{a}} \bullet \nabla \overline{w^{\alpha}} - u_P \underline{b} \bullet \nabla \overline{w^{\alpha}} + c u_P \overline{w^{\alpha}} \right\} d\underline{x}$$

10.- Nótese que para calcular la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes del sistema de ecuaciones, solamente se requiere hacer integraciones en el interior de los subdominios y no en sus fronteras.

11.- En el espacio de funciones óptimas se tiene que $\forall \left(\overline{\mathrm{v}}, \overline{w} \right) \in \overline{O_B} \times \overline{O_T}$:

$$\left\langle \left(P-B-J\right)\overline{\mathrm{v}},\overline{w}\right\rangle = \left(\sum_{i=1}^{E} \int_{\Omega_i} \left\{ \nabla\overline{\mathrm{v}} \bullet \underline{\underline{a}} \bullet \nabla\overline{w} - \overline{\mathrm{v}}\underline{b} \bullet \nabla\overline{w} + c\overline{\mathrm{v}}\overline{w} \right\} d\underline{x} \right)$$

lo cual, aunque aparece en el contexto de un BVPJ, es una expresión típica de los métodos FEM convencionales.

12.- Para el caso simétrico, esto es, cuando el operador diferencial es autoadjunto, se tiene que $\forall\left(\overline{\mathrm{v}},\overline{w}\right)\in \overline{O_B}\times\overline{O_T}$:

$$\left\langle \left(P-B-J\right)\overline{\mathrm{v}},\overline{w}\right\rangle = \left(\sum_{i=1}^{E} \int_{\Omega_i} \left\{ \nabla\overline{\mathrm{v}} \bullet \underline{\underline{a}} \bullet \nabla\overline{w} + c\overline{\mathrm{v}}\overline{w} \right\} d\underline{x} \right)$$

expresión que tiene las propiedades de ser simétrica y positiva definida. Lo anterior genera una matriz de coeficientes simétrica y positiva definida para el sistema de ecuaciones.

13.- El BVPJ con saltos (condiciones de saltos prescritos no nulas) o sin saltos (condiciones de saltos prescritos nulas) posee la misma dificultad. Esto se debe a que en ambas situaciones la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones es la misma. De hecho, la información relacionada con las condiciones de saltos prescritos se encuentra en el vector de términos independientes del sistema de ecuaciones.

14.- La metodología FEM-OF presenta una importante reducción en los grados de libertad con respecto a la metodología FEM convencional (con funciones de peso clase $C^0\left(\overline{\Omega}\right)$). Para hacer la comparación considérese el caso de funciones aproximantes hechas con polinomios cúbicos y un dominio cuadrado para dos dimensiones o un cubo para tres dimensiones, con una partición rectangular uniforme de E elementos por dimensión.

Grados de libertad	FEM con funciones discontinuas	FEM con funciones $C^0(\Omega)$	FEM con funciones $C^1(\Omega)$	FEM-OF
1 dimensión	$4E$	$3E$	$2E$	E
2 dimensiones	$16E^2$	$9E^2$	$4E^2$	$3E^2$
3 dimensiones	$64E^3$	$27E^3$	$8E^3$	$7E^3$

15.- En la práctica, los espacios de funciones óptimas $\overline{O_B}$ y $\overline{O_T}$ se aproximan con espacios de funciones $\widetilde{O_B}$ y $\widetilde{O_T}$, también de dimensión finita N, cuyos miembros aproximan a las funciones óptimas. Son espacios cuyas funciones son polinomios por tramos en el interior de los subdominios Ω_i y que poseen trazas que también son polinomios por tramos en la frontera interior Σ. En estos espacios que aproximan a las funciones óptimas, esto es que las condiciones que imponen los espacios nulos N_P para las funciones de base ($\mathsf{L}\ \mathrm{v}=0$), y N_Q para las funciones de peso ($\mathsf{L}^* w=0$), solamente se pueden satisfacer aproximadamente con ayuda de algún método numérico; por ejemplo: FEM o colocación.

16.- En este trabajo se presentan BVPJ simétricos y no simétricos, para una, dos y tres dimensiones, construyendo las funciones de base y de peso con FEM y con colocación. Para una dimensión se presentan aproximaciones con polinomios cuadráticos en Ω_i y con polinomios cúbicos en Ω_i. Para dos dimensiones se presentan aproximaciones con polinomios cúbicos en Σ y bi-cuadráticos en Ω_i, además de polinomios cúbicos en Σ y bi-cúbicos en Ω_i. Para tres dimensiones se presentan aproximaciones con polinomios bi-cúbicos en Σ y tri-cuadráticos en Ω_i, además de polinomios bi-cúbicos en Σ y tri-cúbicos en Ω_i.

17.- En una dimensión, el método FEM-OF Petrov-Galerkin cuando se aproximan las funciones óptimas con FEM o con colocación, exhibe propiedades de superconvergencia. Se tiene que el orden de convergencia h del error es $O\left(h^{2G_\Omega}\right)$ donde G_Ω es el grado de los polinomios en

Ω_i, en lugar del orden $O\left(h^{2(G_\Omega-1)}\right)$ que se obtiene al aplicar los métodos directo de Steklov-Poincaré o indirecto de Trefftz-Herrera *convencionales* con colocación.

18.- Para el caso simétrico en dos y en tres dimensiones, el método FEM-OF Petrov-Galerkin cuando se aproximan las funciones óptimas con FEM o con colocación, no exhibe propiedades de superconvergencia. Si se utiliza FEM, el orden de convergencia h del error es $O\left(\min\left\{G_\Sigma+1, G_\Omega+1\right\}\right)$ donde G_Σ es el grado de los polinomios en Σ y G_Ω es el grado de los polinomios en Ω_i; mientras que con colocación, $O\left(\min\left\{G_\Sigma+1, 2\left(G_\Omega-1\right)\right\}\right)$.

19.- Para el caso no simétrico en dos dimensiones, el método FEM-OF Petrov-Galerkin cuando se aproximan las funciones óptimas con FEM, exhibe propiedades de superconvergencia. Se tiene que el orden de convergencia h del error es $O\left(\min\left\{G_\Sigma+1, 2G_\Omega\right\}\right)$. Pero cuando se aproximan las funciones óptimas con colocación, no exhibe propiedades de superconvergencia. En este último caso, se tiene que el orden de convergencia h del error es $O\left(\min\left\{G_\Sigma+1, 2\left(G_\Omega-1\right)\right\}\right)$.

20.- Por superconvergencia se entiende lo siguiente. En dos dimensiones, se alcanza el mismo orden de convergencia h del error $O\left(h^4\right)$ utilizando para aproximar la solución polinomios cúbicos en Σ y polinomios bi-cuadráticos en Ω_i, que utilizando polinomios cúbicos en Σ y polinomios bi-cúbicos en Ω_i. La diferencia radica en que para calcular los polinomios bi-cuadráticos se requiere determinar un solo parámetro, mientras que para calcular los polinomios bi-cúbicos se requiere determinar cuatro parámetros. En este sentido, se puede reducir el grado de los polinomios aproximantes en el interior de los subdominios Ω_i obteniendo la misma precisión en los algoritmos. De esta forma se introducen algoritmos de un solo parámetro.

21.- Cuando se aproximan las funciones de base y de peso mediante colocación, durante el procedimiento se tiene que calcular hasta derivadas de segundo orden:

$$\left(-\nabla \bullet \left(\underline{\underline{a}} \bullet \nabla \mathrm{v}\right) + \nabla \bullet \left(\underline{b}\mathrm{v}\right) + c\mathrm{v}\right)\Big|_{\underline{x}_G} = 0$$

En cambio, cuando se aproximan las funciones mediante FEM, solamente se tiene que calcular hasta derivadas de primer orden:

$$\int_{\Omega_i} \left(\nabla \mathrm{v} \bullet \underline{\underline{a}} \bullet \nabla W - \mathrm{v}\underline{b} \bullet \nabla W + c\mathrm{v}W\right) d\,\underline{x} = 0$$

Además, en el primer caso las cuadraturas locales y globales no coinciden; mientras que en el segundo caso, sí coinciden.

22.- Adicionalmente, se presentan diversos BVPJ: problemas no homogéneos, problemas con condiciones de frontera no homogéneas, problemas con condiciones de salto no homogéneas tanto en la función (solución discontinua) como en su derivada (solución continua con derivada discontinua), problemas con coeficientes variables, problemas con coeficientes discontinuos y problemas con advección dominante. En todos ellos aplica la metodología FEM-OF con el mismo grado de dificultad (o de facilidad) y se obtienen los ordenes de convergencia h del error esperados.

9.2.- Trabajo Futuro

Se propone el desarrollo de la metodología FEM-OF para los siguientes casos, ya que se han hecho algunos desarrollos con colocación-TH:

- FEM-OF aplicado a problemas de Elasticidad (Sistemas de Ecuaciones Diferenciales).
- FEM-OF para la EDP Bi-armónica.
  - Enfoque con *splitting* .
  - Enfoque sin *splitting.*
- FEM-OF para el caso Parabólico [59].
  - Enfoque con Semidiscretización en el Tiempo.
  - Enfoque con Espacio-Tiempo.

Se propone introducir técnicas de descomposición de dominio –aplicar cómputo en paralelo- en la metodología FEM-OF. Los problemas en tres dimensiones lo requieren debido a los tamaños de las matrices que resultan como consecuencia de la discretización y de los grados de libertad asociados a cada nodo que son de orden E^3.

También se propone investigar acerca de la introducción de una difusión artificial numérica en la metodología-TH [59,60 a 62].